

Diagonalisation avec le polynôme caractéristique

Banque CCINP : Ex. 59, Ex. 65, Ex. 67, Ex. 69, Ex. 70.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$.

- Calculer le polynôme caractéristique de A et les v.p. de A .
- (i) Déterminer la dimension des s.e.v. propres de A . (ii) En déduire que A est dz.
- (iii) Déterminer, mieux, une base de vecteurs propres de A et en déduire une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale.
- En déduire le polynôme minimal de A .
- En déduire une formule donnant A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ comme combinaison linéaire de A et I .

Exercice 2. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ z & 0 & 1 \\ z & z & 0 \end{pmatrix}$; CNS sur z pour que M soit dz dans $M_3(\mathbb{C})$.

Propriétés du polynôme caractéristique

- Exercice 3.** a) Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (répétées suivant leurs multiplicités). Exprimer les v.p. de $\text{Com}(A)$.
- b) En déduire que pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $\text{Tr}(\text{Com}(A))$ apparaît comme un certain coefficient du polynôme χ_A .
- c) Pour les 5/2, étendre le b), par densité, à toutes les matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 4 (Le polynôme caractéristique « voit la dimension »). Soit E un $\mathbb{R}$ -e.v. et $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant un polynôme annulateur $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.
Montrer que $\dim(E)$ est paire.

Exercice 5. Montrer que dans $M_2(\mathbb{C})$ deux matrices ayant le même polynôme minimal et le même polynôme caractéristique sont semblables.

Indication : On distinguera deux cas pour le polynôme caractéristique.

Exercice 6 (Matrices circulantes). Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

On considère $M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$ appelée matrice circulante.

- Expliciter une matrice J telle que $M = a_0I + a_1J + \dots + a_{n-1}J^{n-1}$.
- Diagonaliser J .
- Montrer que M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
- En déduire une expression du déterminant de M sous forme factorisée à l'aide des racines n -ième de l'unité dans $\mathbb{C}$.

En sens inverse, obtention du polynôme caractéristique avec d'autres informations

Exercice 7. Soit $A \in M_6(\mathbb{R})$ inversible telle que $A^5 - 3A^4 + 2A^3 = 0$ et $\text{Tr}(A) = 8$.
Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A .

Cayley-Hamilton

Exercice 8. Le but de cet exercice est de montrer que toute matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ de rang $r < n$ admet un polynôme annulateur de degré $r + 1$.

- Soit donc $M \in M_n(\mathbb{K})$ de rang $r < n$. Montrer que M est semblable à une matrice N de la forme $N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ où $A \in M_r(\mathbb{K})$ et $C \in M_{n-r,r}(\mathbb{K})$.
- Conclure

Exercice 9. Montrer qu'une matrice $A \in M_2(\mathbb{K})$ est nilpotente si $\text{Tr}(A) = \det(A) = 0$.

Encore une couche de déterminant

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer χ_A et diagonaliser A .

Exercice 11 (Résultat de cours sur les déterminants triangulaires par blocs). Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A \in M_k(\mathbb{K})$, $C \in M_{n-k}(\mathbb{K})$ et en conséquence, $B \in M_{k,n-k}(\mathbb{K})$. On veut montrer que :

$$\det M = \det A \cdot \det C.$$

1) (M1) Avec l'expression combinatoire du déterminant :

a) Montrer que, dans l'expression combinatoire du déterminant, on peut ne considérer que les σ tels que $\sigma([1, k]) = [1, k]$.

b) Montrer que si σ vérifie la condition du a) et $\sigma_1 = \sigma|_{[1, k]}$ et $\sigma_2 = \sigma|_{[k+1, n]}$, on a $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$,

c) Conclure.

2) (M2) avec une décomposition astucieuse : on remarque d'abord que la matrice M peut se décomposer suivant le produit suivant : $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$. *Qu'y gagne-t-on ?*

Exercice 12 (Centrale 2, Python).

Soit un entier $n \geq 1$ et a un réel non nul. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_{n,a} = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & 1/a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1/a \\ 0 & \dots & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

- Écrire une fonction qui étant donné un entier $n \geq 1$ et un réel a non nul renvoie la matrice $A_{n,a}$.
- Donner des valeurs approchées décimales des valeurs propres de $A_{n,a}$ pour $3 \leq n \leq 8$ et a dans $\{-2, -1, 1, 2, 3\}$.
- Soit $(P_n)_{n \geq 1}$ la suite de polynômes définie par :

$$P_1 = X \quad P_2 = X^2 - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

- Calculer les coefficients de $P_3, \dots, P_8$.
 - Donner des valeurs approchées des racines de $P_3, \dots, P_8$.
 - Conjecturer un lien entre P_n et $A_{n,a}$ et le démontrer.
- Les matrices $A_{n,a}$ sont-elles inversibles ? diagonalisables ?
 - Trouver un segment de $\mathbb{R}$ contenant toutes les valeurs propres de $A_{n,a}$ pour n entier et a réel dans $\mathbb{R}^*$.

Diagonalisation simultanée

Exercice 13 (Un grand classique qu'il est bon de connaître pour d'autres exercices). Soit E un K -e.v. de dim. finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes diagonalisables qui commutent : $f \circ g = g \circ f$.

Montrer que f et g sont simultanément diagonalisables, i.e. qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soient diagonalisables.

Sous-espaces stables

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé.

- Déterminer valeurs propres et s.e.v. propres de u . Est-il diagonalisable ?
- Déterminer le polynôme minimal de u .
- Déterminer $\ker(u - 5 \text{id})^2$.
- Déterminer tous les s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ stables par u .