

Banque CCINP : Ex. 62 en entier, Ex. 65 1,2, Ex. 71.

### Réduction par équivalence, et équivalence-à-droite ou à gauche

**Exercice 1.** Soit  $A \in M_{n,p}(K)$ .

- a) On suppose  $\text{rg}(A) = n$ , montrer qu'il existe  $B \in M_{p,n}(K)$  telle que  $AB = I_n$ .
- b) On suppose  $\text{rg}(A) = p$ , montrer qu'il existe  $C \in M_{p,n}(K)$  telle que  $CA = I_p$ .

**Exercice 2.** Soit  $A$  une matrice non inversible. Montrer qu'il existe toujours une matrice  $M$  inversible telle que  $MA$  soit nilpotente.

**Exercice 3.** Soit  $A \in M_n(K)$  avec  $n \geq 2$  telle que  $\forall X \in M_n(K)$ ,  $\det(A + X) = \det(A) + \det(X)$ .  
Montrer que  $A = 0$ .

### Matrices semblables

**Exercice 4.** Si  $A$  et  $B$  dans  $M_n(\mathbb{K})$  et  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  vérifient  $B = PAP^{-1}$  alors comparer  $\ker(A)$  et  $\ker(B)$  et  $\text{Im}(A)$  et  $\text{Im}(B)$ .

**Exercice 5.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $m$  tel que  $2m \leq n$ .

Montrer que les deux matrices suivantes sont semblables : (écriture par bloc)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -I_m & 0 \\ I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & K_m & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ où } \forall i \in [1, m], K_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 6.** a) Soit  $A \in M_n(K)$  une matrice semblable à une matrice  $B \in M_n(K)$  dont la première ligne et la première colonne sont nulles. Montrer que  $\ker A \not\subset \text{Im } A$ .

b) Montrer réciproquement que si  $\ker A \not\subset \text{Im } A$  alors  $A$  est semblable à une matrice dont la première ligne et la première colonne sont nulles.

c) Montrer que la condition  $\ker A \not\subset \text{Im } A$  est équivalente à  $\dim \ker(A^2) < 2 \dim \ker A$ .

**Exercice 7** (Classes de similitude des matrices de rang 1). a) Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $\text{rg}(A) = 1 \Leftrightarrow$   
 $\begin{cases} A \text{ est semblable à } E_{2,1} \\ \text{ou } \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tel que } A \text{ est semblable à } \lambda E_{1,1}. \end{cases}$

b) Montrer que deux matrices de rang 1 sont semblables si, et seulement si, elles ont même trace.

c) Une jolie application : une façon « conceptuelle » de calculer  $\det(A)$  où  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

en voyant cette matrice  $A$  comme  $E - I$  où  $E$  est la matrice dont toutes les entrées valent 1.

(i) Trouver une matrice diagonale très simple à laquelle  $E$  est semblable.

(ii) En déduire sans calcul supplémentaire, la valeur de  $\det(A)$ .

**Exercice 8.** Soit  $K$  un corps et  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ . Pour quels  $(a, b, c) \in K^3$  cette matrice est-elle diagonalisable ?

### Diagonalisations concrètes (équation aux valeurs propres)

**Exercice 9.** Soient  $a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$  et  $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ .

Déterminer une C.N.S. sur  $a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$  pour que  $M$  soit diagonalisable.

**Exercice 10.** Soient  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  canoniquement associé à  $A$ . On suppose que  $n$  est un nombre pair.

- a) Montrer que  $E = \mathbb{C}^n$  peut s'écrire comme somme directe de plans stables par  $f$ .
- b) En déduire une C.N.S. sur  $(a_1, \dots, a_n)$  pour que  $A$  soit diagonalisable.

## L'apport du polynôme minimal

**Exercice 11.** Soient  $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$  et  $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ .

- En écrivant  $M(a, b)$  à l'aide de la matrice  $I$  et de la matrice  $E$  dont toutes les entrées valent 1, calculer le polynôme minimal de la matrice  $M(a, b)$
- La matrice  $M(a, b)$  est-elle dz ? Si oui la diagonaliser.

**Exercice 12.** a) Quel est le polynôme minimal d'une matrice nilpotente d'indice  $r$  ?

b) Si  $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  avec  $A$  et  $B$  matrices carrées, déterminer une relation entre  $\mu_M$  et les polynômes  $\mu_A$  et  $\mu_B$ .

c) Soient  $(a, b, c) \in K^3$  et  $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ . Déterminer le polynôme minimal de  $M$ .

## Propriétés sympa des matrices diagonales

**Exercice 13.** Soit  $A \in M_n(K)$  une matrice diagonale de la forme  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  avec  $a_1, \dots, a_n$  deux à deux distincts. Montrer que l'algèbre  $K[A]$  coïncide avec l'algèbre  $\mathcal{D}_n$  formée par toutes les matrices diagonales.

**Exercice 14.** a) Reprendre le résultat de l'ex. 20 pl. R0 et redémontrez le par un argument géométrique.

b) Décrire plus généralement l'e.v. des matrices qui commutent à une matrice diagonale  $D \in D_n(K)$  où la valeurs  $\lambda_1$  est répétée  $r_1$  fois sur la diagonale,  $\lambda_2$  répétée  $r_2$  fois, jusqu'à  $\lambda_s$  répétée  $r_s$  fois (avec  $r_1 + \dots + r_s = n$ ). On déterminera sa dimension en fonctions de  $r_1, \dots, r_s$ .

c) En déduire le même résultat pour les matrices/endomorphismes diagonalisables.

## L'apport des polynômes annulateurs pour la diagonalisabilité ou d'autres renseignements...

**Exercice 15.** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ , et  $f, u, v \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que  $f = au + bv$ ,  $f^2 = a^2u + b^2v$ ,  $f^3 = a^3u + b^3v$ .

On suppose  $a$  et  $b$  distincts et différents de 0.

- Montrer que  $f$  est diagonalisable.
- Montrer que  $u$  et  $v$  sont simultanément diagonalisables.

**Exercice 16.** Soit  $E$  un  $K$ -e.v. de dim. finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable. Soit  $F \subset E$  un s.e.v. de  $E$  stable par  $f$ . Montrer que  $g = f|_F$  est encore diagonalisable.

**Exercice 17.** Soit  $A \in M_3(\mathbb{R})$  telle que  $A^4 = A^2$  et  $\{-1, 1\} \subset \text{Sp}(A)$ .

Montrer que  $A$  est diagonalisable dans  $M_3(\mathbb{R})$ .

**Exercice 18.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -e.v. de dim. finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^3 + u = 0$ . Montrer que  $\text{rg}(u)$  est pair.

**Exercice 19.** Soit  $M \in M_n(K)$  qui s'écrit par blocs  $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  avec  $A$  et  $B$  deux matrices carrées.

Montrer que  $M$  est diagonalisable si, et seulement si,  $A$  et  $B$  sont diagonalisables.

**Exercice 20** (Exercice de cours : démo très guidée du théorème des noyaux pour deux polynômes). Soit  $E$  un  $K$ -e.v. quelconque et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $P$  un polynôme annulateur de  $u$ , qui se décompose en  $P = P_1 \cdot P_2$  avec  $P_1 \wedge P_2 = 1$ .

(C1) A l'aide de l'identité de Bézout montrer que  $\text{Ker} P_1(u) \cap \text{Ker} P_2(u) = \{0\}$  et que  $\text{Im} P_1(u) + \text{Im} P_2(u) = E$ .

(C2) Montrer ensuite que  $\text{Im} P_1(u) = \text{Ker} P_2(u)$  et  $\text{Im} P_2(u) = \text{Ker} P_1(u)$  et donc la décomposition :  $E = \text{Ker} P_1(u) \oplus \text{Ker} P_2(u)$

(C3) Montrer en outre que les projecteurs associés à cette décomposition  $E = \text{Ker} P_1(u) \oplus \text{Ker} P_2(u)$  sont dans  $K[u]$ .