

Solutions d'exercices planche F1

Exercice 1 (Intersection de convexes et Enveloppe convexe). a) Soit E un $\mathbb{R}$ -e.v. et $(C_i)_{i \in I}$ une famille quelconque (même infinie) de sous-ensembles convexes de E .

Montrer que $C = \bigcap_{i \in I} C_i$ est convexe.

b) Soit $A \subset E$ et $(C_i)_{i \in I}$ la famille de tous les ensembles convexes de E contenant A .

Justifier que $\bigcap_{i \in I} C_i$ est le plus petit ensemble convexe de E contenant A , en précisant d'abord ce que veut dire exactement cet énoncé.

On notera cette ensemble $\text{conv}(A)$ et on l'appelle *enveloppe convexe* de A .

c) Justifier que pour tout $u \in E, u \in \text{conv}(A)$ si, et seulement si, il existe un entier p et des éléments $a_1, \dots, a_p$ de A tels que u est combinaison convexe de $a_1, \dots, a_p$.

Solution 1 a) Soit $a \in C, b \in C$ et $t \in [0, 1]$. On veut montrer que $ta + (1-t)b \in C$.

Or pour chaque $i \in I, a \in C_i$ et $b \in C_i$ comme C_i est convexe, on sait donc que $ta + (1-t)b \in C_i$.

Ainsi $ta + (1-t)b$ est dans chaque C_i et donc il est dans $C = \bigcap_{i \in I} C_i$.

b) Dire que $\ll C := \bigcap_{i \in I} C_i$ est le plus petit ensemble convexe de E contenant $A \gg$ signifie *deux choses* :

- (1) C est un ensemble convexe de E qui contient A ,
- (2) pour tout ensemble convexe Γ de E qui contient A , on a $C \subset \Gamma$.

Pour montrer (1) : on sait déjà par le a) que C est convexe. D'autre part si $a \in A$, par déf. $a \in C_i$ pour tout $i \in I$, donc $a \in C$. Ainsi $A \subset C$.

Pour montrer (2) : soit Γ un sous-ensemble convexe de E contenant A , alors $\Gamma = C_{i_0}$ pour un certain $i_0 \in I$ et donc $C := \bigcap_{i \in I} C_i \subset C_{i_0} = \Gamma$.

La construction donnée au a) et au b), pour construire le plus petit ensemble convexe de E contenant un ensemble A , s'appliquerait aussi par exemple pour construire, pour une partie A d'un groupe $(G, \cdot)$ le plus petit sous-groupe de $(G, \cdot)$ contenant A , noté parfois $\langle A \rangle$, ou encore pour une partie A d'un e.v. E , le plus petit s.e.v. de E contenant A , noté $\text{Vect}(A)$. On dit parfois que c'est une construction « par l'extérieur ». Cette construction est très abstraite car elle ne nous dit pas grand chose de la forme des éléments de $\text{conv}(A)$ (resp. de $\langle A \rangle$ resp. de $\text{Vect}(A)$). Le c) donne une façon d'attraper les éléments de $\text{conv}(A)$ plus concrète, « par l'intérieur », très analogue à ce qu'on sait pour les éléments de $\text{Vect}(A)$ qui sont les combinaisons linéaires d'un nombre fini d'éléments de A .

c) Notons $C = \text{conv}(A)$

Sens $\Rightarrow$: si $a_1, \dots, a_p$ sont des éléments de A et donc de C et si $c = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$ avec $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_p \geq 0$ et $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, comme C est convexe, on sait que $c \in C$.

Sens $\Leftarrow$ (plus abstrait) : Soit Γ l'ensemble des tous les points de E qui peuvent s'écrire comme combinaison convexe des éléments de A . En particulier $\Gamma \supset A$ et le raisonnement précédent, dit que tout convexe contenant A contient Γ . Donc pour montrer que $\Gamma = C$, il suffit donc (par b)) de montrer que Γ est lui-même convexe.

Or soit γ et γ' deux points de Γ . On a $\gamma = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$ avec $\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ et $a_1, \dots, a_m \in A$

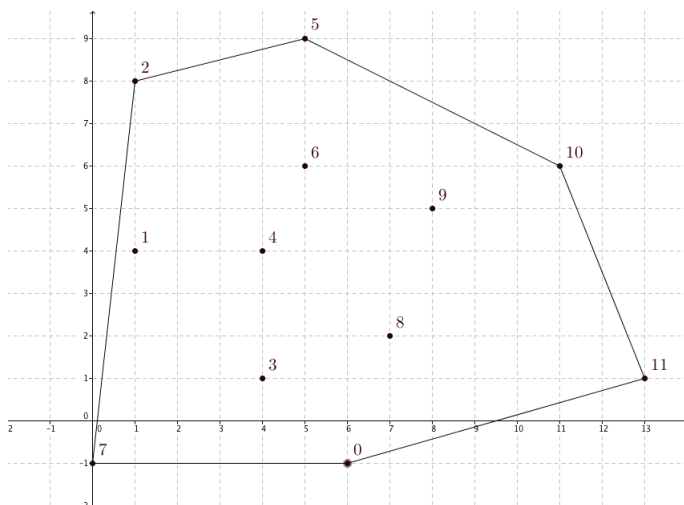
et de même $\gamma' = \lambda'_1 a'_1 + \dots + \lambda'_n a'_n$ avec $\lambda'_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda'_i = 1$ et $a'_1, \dots, a'_n \in A$.

Soit $t \in [0, 1]$ et $c = t\gamma + (1-t)\gamma'$.

Alors $c = \sum_{i=1}^m (t\lambda_i) a_i + \sum_{i=1}^n ((1-t)\lambda'_i) a'_i$ est bien le barycentre de $a_1, \dots, a_m, a'_1, \dots, a'_n$ avec les

poids tous positifs et la somme des poids qui fait bien $t(\sum_{i=1}^m \lambda_i) + (1-t)(\sum_{i=1}^n \lambda'_i) = 1$ donc $c \in \Gamma$. $\square$

d) Illustration d'une enveloppe convexe d'un nuage de 11 points dans le plan (on ne dessine que le bord, mais l'enveloppe convexe et toute zone à l'intérieur de l'hexagone :



Exercice 2 (Thème de Gauss-Lucas). a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et de racines $z_1, \dots, z_n$ dans $\mathbb{C}$ (non nécessairement distinctes).

(i) Montrer que si z est une racine de P' qui n'est pas une racine de P , alors : $\sum_{k=1}^n \frac{z - z_k}{|z - z_k|^2} = 0$.

(ii) En déduire que les racines de P' sont toujours dans l'enveloppe convexe des racines de P .

b) Bonus : Faire le lien entre ce qui précède et la citation de Gauss suivante :

Les points critiques d'un polynôme $f \in \mathbb{C}[z]$ qui ne sont pas des zéros multiples de f sont situés aux points d'équilibre d'un certain champ de force. Ce champ est celui créé par des particules placées chacune en un zéro de f , de masse égale à leur multiplicité comme zéro de f , et exerçant une attraction suivant la loi de l'inverse des distances¹.

Enoncé original, par Gauss, de ce qui deviendra le théorème de Gauss-Lucas.

Solution 2 a) (i) Pour $P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - z_k)$, on sait (formule de la dérivée logarithmique) que :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - z_k}.$$

Donc si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de P' qui n'est pas une racine de P , on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k} = 0$. En conjuguant, on a : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_k} = 0$ et donc en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué pour chaque terme : $\sum_{k=1}^n \frac{z - z_k}{|z - z_k|^2} = 0$, ce qui est le résultat.

(ii) En isolant z dans l'égalité du (i), on obtient : $\sum_{k=1}^n \frac{z}{|z - z_k|^2} = \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{|z - z_k|^2}$.

En notant $\lambda_k = \frac{1}{|z - z_k|^2} \in \mathbb{R}^+$, on a donc $z = \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k z_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k}$, ce qui montre que z est dans l'enveloppe

convexe de $z_1, \dots, z_n$.

b) Au a) , on a dit que $z \in \mathbb{C}$ est racine de P' et pas de P ssi $P'(z)/P(z) = 0$ ssi $\sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k} = 0$ en notant $z_1, \dots, z_n$ les racines de P répétées autant de fois que leur multiplicité ce qu'on peut réécrire aussi : $\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{z - z_i}$ où cette fois $z_1, \dots, z_r$ sont deux à deux distinctes de multiplicités $m_1, \dots, m_r$.

Comme au a) en conjuguant puis en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué on a l'équation équivalente : $\sum_{i=1}^r m_i \frac{z - z_i}{|z - z_i|^2} = 0$.

1. Attention pas l'inverse des carrés des distances comme la « vraie » gravitation

En notation plus géométrique avec $M(z)$ et $M_i(z_i)$, cette équation équivaut à $\sum_{i=1}^r m_i \frac{\overrightarrow{M_i M}}{M_i M^2} = \vec{0}$ (*).

Or $Gmm_i \frac{\overrightarrow{M_i M}}{M_i M^2}$ est la force exercée (suivant la convention de l'énoncé) sur un point M de masse m par un point matériel (M_i, m_i) .

Les positions M vérifiant (*) sont donc exactement celles où la somme des forces est nulle donc les points d'équilibre du champ de force.

Exercice 4 (Fonction strictement convexe, CNS d'égalité dans l'inég. générale de convexité).

a) Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est *strictement convexe* ssi $\forall (a, b) \in I^2$ avec $a \neq b$, $\forall t \in]0, 1[$, $f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b)$.

Supposons donc f strictement convexe. Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, on a :

$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) < \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$ dès que les λ_i sont tous non nuls et les x_i ne sont pas tous égaux.

Autrement dit — La CNS d'égalité dans l'inégalité générale de convexité est, si les λ_i sont tous non nuls, que tous les x_i sont égaux.

b) Application : déterminer la CNS d'égalité dans l'I.A.G.

Solution 4

Pour l'inégalité large, en cours on a évité la récurrence via l'épigraphe. Ici, on rédige la récurrence.

Supposons donc f strictement convexe. Pour chaque $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on note $H(n)$ la propriété :

[pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, $f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) < \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$ dès que les λ_i sont tous non nuls et les x_i ne sont pas tous égaux.]

Montrons par récurrence que $H(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

- Initialisation : pour $n = 2$, $H(2)$ est la déf. de la stricte convexité de f .
- Supposons $H(n)$ vraie pour un $n \geq 2$ et montrons $H(n+1)$.

Soit donc $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ pas tous égaux et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in]0, 1]^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

Notons $g = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$. On sait (associativité barycentrique) que g est barycentre de (g_n, Λ) , (x_{n+1}, λ_{n+1})

avec $g_n = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\Lambda}$ et $\Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$.

Autrement dit (comme $\Lambda + \lambda_{n+1} = 1$), $g = \Lambda g_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}$ (0).

- 1er cas : $g_n \neq x_{n+1}$ dans ce cas par $H(2)$, on sait que

$$f(g) < \Lambda f(g_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \quad (1)$$

Or par l'inégalité de Jensen usuelle, $f(g_n) = f(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\Lambda} f(x_i)$ ce qui dans l'inégalité stricte (1) donne encore l'inégalité stricte :

$$f(g) < \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \quad (2)$$

et (2) donne exactement $H(n+1)$.

- 2ème cas : $g_n = x_{n+1}$

Dans ce cas on est sûr que $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas tous égaux car sinon on aurait $g_n = x_1$ et donc par l'hyp. de ce deuxième cas $x_1 = x_{n+1}$ et donc $x_1, \dots, x_{n+1}$ seraient tous égaux, contrairement à notre hypothèse dans $H(n+1)$.

Alors on peut appliquer $H(n)$ qui dit que

$$f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i\right) < \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\Lambda} f(x_i) \quad (3)$$

D'autre part, par convexité de f et l'égalité (0), on a :

$$f(g) \leq \Lambda f(g_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \quad (4)$$

Avec (3) et (4) on a :

$$f(g) < \Lambda \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\Lambda} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

ce qui donne exactement $H(n+1)$.

La récurrence est établie. □

b) **L'inégalité arithmético géométrique dit que :**

si $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, \dots, x_n$ sont des réels strictement positifs, alors :

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (IAG)$$

La démonstration la plus efficace de cette inégalité est d'utiliser le logarithme. En effet :

$$\begin{aligned} (IAG) &\Leftrightarrow \ln\left(\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n}\right) \leq \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) \quad \text{par stricte croissance du } \ln, \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \leq \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) \quad (*) \quad \text{par prop. alg. du } \ln \end{aligned}$$

et $(*)$ est vraie par l'inégalité de Jensen avec les poids $\lambda_i = 1/n$ pour la fonction *concave* $\ln$ donc (IAG) est vraie.

Mais l'exercice porte sur la CNS d'égalité dans (IAG)

Vues les équivalentes précédentes, (IAG) est une égalité ssi $(*)$ est une égalité.

Or par stricte concavité du $\ln$, comme ici les $\lambda_i = 1/n$ sont tous non nuls :

$(*)$ est une égalité ssi $x_1, \dots, x_n$ sont tous égaux. C'est donc la CNS cherchée pour l'IAG.

N.B. Comment justifier la *stricte concavité* du $\ln$? Ou bien avec la remarque du cours qui dit qu'une fonction concave est strictement concave ssi son graphe ne contient pas de segment, que l'on démontre en lemme dans l'exercice suivant ; ou bien, tant qu'à faire, avec le résultat de cet exercice 5.

Exercice 5. Montrer que si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et si f' est strictement croissante sur I alors f est *strictement convexe* sur I .

Solution 5 Comme f' est en particulier croissante sur I , on sait que f est convexe sur I . Par l'absurde si f n'est pas strictement convexe alors on montre (cf. lemme ci-dessous) que f est affine sur un certain intervalle $[\alpha, \beta]$ avec $\alpha < \beta$. Alors f' est constante sur $[\alpha, \beta]$, ce qui est une *contradiction*.

Lemme : une fonction convexe $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas strictement convexe si, et seulement s'il existe un sous-intervalle $[a, b] \subset I$ avec $a < b$ tel que $f|_{[a,b]}$ est affine.

Démonstration du lemme

Sens facile : si f est affine sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ alors pour tout $t \in [0, 1]$, $f((1-t)a + tb) = (1-t)f(a) + tf(b)$ ce qui pour $t \in]0, 1[$ montre que f n'est pas strictement convexe.

Sens moins facile : on suppose que f n'est pas strictement convexe (mais convexe). Donc il existe $a < b$ dans I et il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que l'inégalité stricte $f((1-t_0)a + t_0b) < (1-t_0)f(a) + t_0f(b)$ soit *fausse*. Or comme l'inégalité large est vraie par convexité de f , cela signifie que $f((1-t_0)a + t_0b) = (1-t_0)f(a) + t_0f(b)$ $(\dagger)$.

Notons $x_0 = (1 - t_0)a + t_0b$. Géométriquement, l'égalité $(\dagger)$ signifie que le point $(x_0, f(x_0))$ est sur le segment $[A, B]$ où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

Considérons la fonction $\tau_{x_0} : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Alors $(\dagger)$ signifie que $\tau_{x_0}(a) = \tau_{x_0}(b)$.

Mais comme τ_{x_0} est croissante, on en déduit que τ_{x_0} est constante sur tout $[a, b] \setminus \{x_0\}$, ce qui signifie encore que f est affine sur $[a, b]$. $\square$