

D.M 3. Révisions et compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1. Soit K un corps, soit $a \in K$.

$$\text{Soient } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a^{n-1} & a^n \\ 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ toutes les deux dans}$$

$TS_{n+1}(K)$.

- 1) Soit f l'application linéaire associée à N , dans la base canonique $(e_1, \dots, e_{n+1})$ de $E = K^{n+1}$.
 - a) Donner l'image $f(e_i)$ de chacun des vecteurs e_i pour $i = 1, \dots, n+1$.
 - b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $f^k = f \circ \cdots \circ f$ la composée k -ième de l'endomorphisme f . Donner l'image $f^k(e_i)$ de chacun des vecteurs e_i pour $i = 1, \dots, n+1$.
 - c) Ecrire la matrice N^k pour chacun des $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.
- 2)
 - a) Exprimer A en fonction de N .
 - b) En déduire le calcul de A^{-1} .
- 3)
 - a) Exprimer A^{-k} comme une somme en fonction de N et de a pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 - b) Ecrire explicitement la matrice A^{-5} pour $n = 3$ (donc $n+1 = 4$, on est dans $M_4(K)$) et $a = -1$.
- 4) Justifier que la formule suivante donne A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$A^k = I + \binom{-k}{1}(-a)N + \binom{-k}{2}(-a)^2N^2 + \cdots + \binom{-k}{n}(-a)^nN^n.$$

Problème. Partie I : Indépendance linéaire avec un déterminant :

Soit A un ensemble non vide et $(f_1, \dots, f_n)$ des applications de A dans un corps K .

On définit une application :

$$C_{(f_1, \dots, f_n)} : A^n \rightarrow K, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1) & \cdots & f_n(x_n) \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre si, et seulement si, il existe $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$ tel que $C_{(f_1, \dots, f_n)}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. *Indication* – Pour l'implication $\Rightarrow$, on pourra raisonner par récurrence.
- 2) On fixe $(f_1, \dots, f_n)$ une famille libre de fonctions et on note pour simplifier C_n pour $C_{(f_1, \dots, f_n)}$.
On fixe un n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$ tel que $C_n(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, comme donné par le 1).
On note, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $F_i : A \rightarrow K, x \mapsto C_n(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$.
Autrement dit F_i est la i -ième fonction partielle de C_n en $(x_1, \dots, x_n)$.
 - a) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $F_i \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$.
 - b) Montrer, mieux, que $\text{Vect}(F_1, \dots, F_n) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$.
- 3) On déduit de ce qui précède, que la donnée de l'application $C_{(f_1, \dots, f_n)}$ détermine le s.e.v. $\text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$ et mieux si $(g_1, \dots, g_n)$ est une autre famille d'applications de A dans K , et si on note $D_n = C_{(g_1, \dots, g_n)}$, montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
 - a) $\text{Vect}(g_1, \dots, g_n) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$,
 - b) $\exists \lambda \in K^*, D_n = \lambda C_n$.

Partie II : éléments de dualité

Définition Soit E un K -e.v. on note $E^* = \mathcal{L}(E, K)$ l'e.v des formes linéaires de E dans K , appelé *espace dual* de E .

- 4) Formes coordonnées et base duale :
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .
Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note e_i^* l'unique forme linéaire de E vérifiant :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}.$$

- a) Si $u = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ avec $x_1, \dots, x_n \in K$, que vaut $e_i^*(u)$? La forme linéaire e_i^* s'appelle i -ième forme coordonnée.
- b) Montrer que $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* . Cette base est appelée *base duale* de $\mathcal{B}$.
- c) Dans le cas particulier où E est un espace vectoriel euclidien pour lequel on note $(u|v)$ le produit scalaire de deux vecteurs, et où $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E , montrer que e_i^* est la forme linéaire $(e_i | \cdot) : u \mapsto (e_i | u)$.
- 5) Cas de la dimension infinie (excursion facultative) :
- a) Justifier que si $(e_i)_{i \in I}$ est une base (même infinie) d'un K -e.v. E , on peut encore définir les formes coordonnées $(e_i^*)_{i \in I}$ associées.
- b) Avec les mêmes notations, montrer que si I est un ensemble *infini* et si on considère la forme linéaire $\chi : E \rightarrow K$ qui à chaque vecteur $u \in E$ associe la somme de ses coordonnées dans la base $(e_i)_{i \in I}$ alors $\chi \notin \text{Vect}((e_i^*)_{i \in I})$.
- c) Conclure que la famille $(e_i^*)_{i \in I}$ est génératrice de E^* si, et seulement si, E est de dimension finie.
- 6) Retour à la dimension finie : **Déf.** Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^* . On dit qu'une famille $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ est *antéduale* de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ssi $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\varphi_i(u_j) = \delta_{i,j}$.
- a) Montrer que dans ce cas $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E . On l'appelle la base antéduale de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Noter qu'alors $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est la base duale de $(u_1, \dots, u_n)$.
- b) Montrer que si $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ admet une base antéduale, alors celle-ci est *unique*.
- c) Le problème qui reste est de montrer que toute base de E^* admet effectivement une base antéduale.
- Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in (E^*)^n$ une base de E^* .
- (1) Soit $\Phi : E \rightarrow \mathbb{K}^n$, $x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$.
Montrer que Φ est *surjective*.
Indication pour la preuve : Par l'absurde si Φ n'est pas surjective, alors $\text{Im}(\Phi)$ est inclus dans un hyperplan de $\mathbb{K}^n$. En considérant une équation cartésienne de cet hyperplan, on obtient une contradiction....
- (2) En déduire que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ admet une base antéduale.
- 7) Exemple de base antéduale : Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$. Soient $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ quatre réels.
Pour $i = 1, \dots, 4$, soit $\varphi_i : E \rightarrow \mathbb{R}$, $P \mapsto P(x_i)$ la forme linéaire *évaluation en x_i* .
Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de E^* et expliciter sa base antéduale.
- 8) Un résultat clef sur les relations entre formes linéaires : pour des K -e.v. de dim. finie.
- a) Version généralisée du lemme de factorisation de l'ex. 11 pl. R0. Montrer que si $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E, G)$ sont telles que $\ker(\Phi) \subset \ker \varphi$ alors il existe $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$ telle que $\varphi = \psi \circ \Phi$.
- b) En déduire que si $\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi$ sont dans E^* et $\bigcap_{i=1}^p \ker(\varphi_i) \subset \ker(\varphi)$ alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$, $\varphi = \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i$.
- c) Que dire alors d'une famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ de formes linéaires telle que $\bigcap_{i \in I} \ker(\varphi_i) = \{0_E\}$?
- 9) Application aux s.e.v. de dim finie de $\mathcal{F}(A, K)$:
- Soit A un ensemble quelconque et E un s.e.v. de dimension finie de $\mathcal{F}(A, K)$. Pour chaque $a \in A$, on note $ev_a : E \rightarrow K$, $f \mapsto f(a)$ la forme linéaire « évaluation en a ».
- a) Montrer que $\bigcap_{a \in A} \ker(ev_a) = \{0\}$.
- b) En déduire qu'il existe un nombre fini $a_1, \dots, a_n$ d'éléments de A tels que la famille $(ev_{a_1}, \dots, ev_{a_n})$ forme une base de E^* .
- c) En déduire une nouvelle preuve de la question 1.