Banque CCINP : Ex 59, 60, 62 (sauf 2.a), 63. a, b, 64

E.v. familles libres, génératrices, bases, supplémentaires, dimension

Exercice 1. Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1,1]$ dont les restrictions à $[-1,0]$ et $[0,1]$ sont affines.

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-e.v. et en donner une base.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. a) Montrer que la famille des fonctions $f_k : x \mapsto \sin(x^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ est *libre* dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b) Montrer le même résultat pour la famille des fonctions $g_k : x \mapsto \cos(x^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Etudier la dépendance linéaire de $f, f\circ f, f\circ f\circ f$?

Exercice 4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n\}$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-e.v. et en déterminer une base.

Exercice 5. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$. Pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, on note $H_i = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,\widehat{e_i},\dots,e_n)$.

Soit $\Delta = \mathbb{R}.u$ une droite vectorielle avec $u = (u_1,\dots,u_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

a) Montrer qu'il existe un $i \in [\![1,n]\!]$, $\Delta \oplus H_i = E$.

b) Donner une C.N.S. sur les coordonnées $(u_1,\dots,u_n)$ de u pour qu'on ait, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\Delta \oplus H_i = E$.

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$.

Soit F le s.e.v. de E formé des fonctions constantes et soit $G = \{f \in E, \displaystyle\int_{-1}^{1} f = 0\}$.

Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 7. Soit F un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dim. au moins deux. Montrer qu'il existe $f \in F \setminus \{0\}$ tel que $f(0) = 0$.

Bonus : interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 8. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n. On note $\mathcal{V}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E et on considère une fonction d de $\mathcal{V}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\forall (F,F') \in \mathcal{V}^2, F \cap F' = \{0\} \Rightarrow d(F+F') = d(F) + d(F')$,

(ii) $d(E) = n$.

a) Soit D_1 et D_2 deux droites vectorielles distinctes de E. Montrer que D_1 et D_2 admettent un supplémentaire commun dans E.

b) En déduire que toutes les droites vectorielles ont même image par d.

c) Conclure que d est la fonction "dimension".

Exercice 9. Soit E un e.v. de dim. finie et F_1, F_2, F_3 trois s.e.v. de E. Montrer que :

$$\dim(F_1+F_2+F_3) \leq \dim(F_1)+\dim(F_2)+\dim(F_3)-\dim(F_1\cap F_2)-\dim(F_1\cap F_3)-\dim(F_2\cap F_3)+\dim(F_1\cap F_2\cap F_3)$$

Exercice 10. Soit $\theta \in]0,\pi[$ fixé.

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2\cos(\theta)u_{n+1} - u_n$ Déterminer, *en justifiant votre démarche*, une écriture explicite pour (u_n).

Applications linéaires

Exercice 11 (Lemme de factorisation, Mines Ponts)**.** Soient $(u,v) \in \mathcal{L}(E,F)^2$.

Montrer que $\ker u \subset \ker v \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(F),\ v = w \circ u$.

Exercice 12. Soient f_1 et f_2 deux projecteurs d'un e.v. E quelconque, tels que $f_1 \circ f_2 = 0$ et $f_2 \circ f_1 = 0$.

a) Montrer que $f = f_1 + f_2$ est un projecteur.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(f_1 + f_2) = \mathrm{Im}(f_1) \oplus \mathrm{Im}(f_2)$.

c) Montrer que $\ker(f_1 + f_2) = \ker(f_1) \cap \ker(f_2)$

Remarque : toute ceci se généralise avec une somme de davantage de projecteurs...

Exercice 13. Soit E un e.v. de dim. p et F un e.v. de dim. n. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $f \circ g$ soit un projecteur de rang p.

Montrer que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

N.B. L'exercice est le plus souvent donné sous la forme matricielle suivante : $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ sont telles que AB est la matrice d'un projecteur de rang p (parfois donné très concrètement). Montrer que $BA = I_p$.

(On supposera que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ comme le veut le programme...)

Exercice 14. Soit E de dim. finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $\ker f$ admet un s.e.v supplémentaire qui est stable par f, alors c'est $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 15. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dim finie et F et G deux s.e.v. de E. Donner une C.N.S pour qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker(f) = F$ et $\mathrm{Im}(f) = G$.

Exercice 16.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. finie.

Montrer $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$ si, et seulement si, $f_{|\mathrm{Im}\, f}$ est un automorphisme.

Exercice 17 (La suite des dimension des images diminue de moins en moins vite)**.** Soit E un K-e.v. de dim. finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

En considérant pour chaque $p \in \mathbb{N}$, $f_{|\mathrm{Im}\, f^p} : \mathrm{Im}\, f^p \to \mathrm{Im}\, f^{p+1}$, montrer que la suite des $\dim(\mathrm{Im}\, f^p) - \dim(\mathrm{Im}\, f^{p+1})$ est décroissante.

Matrices

Exercice 18. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2.

b) En déduire que M est inversible et le calcul de M^{-1}.

c) Par division euclidienne de polynômes calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 19 (Un tout petit parfum d'arithmétique..)**.** Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{Z})$, on note $d(X)$ le pgcd de $x_1, \dots, x_n$.

Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{Z})$, et tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{Z})$, $d(X) | d(AX)$.

Exercice 20. Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distincts.

Déterminer l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D.

Exercice 21 (Commutant d'une matrice TS)**.** Soit $T \in TS_n(\mathbb{K})$ et $C = \{M \in TS_n(\mathbb{K}),\ TM = MT\}$. Montrer que $\dim(C) \geq n$.

Indication – Considérer $M \mapsto TM - MT$.

Exercice 22 (Matrice de la multiplication à gauche par A)**.** a) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$.

Soit $L_A : M_2(\mathbb{K}) \to M_2(\mathbb{K})$, $M \mapsto AM$ l'application « multiplication à gauche par A ».

On ordonne la base canonique de $M_2(\mathbb{K})$ sous la forme $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$.

b) Généraliser pour $A \in M_n(\mathbb{K})$. En déduire notamment le $\mathrm{rg}(L_A)$ en fonction du rang de A.

Exercice 23. a) Soit $N \in M_n(K)$ une matrice nilpotente et $M = I + N$, montrer que M est inversible et exprimer M^{-1} comme un « polynôme en N ».

b) Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B \in M_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Montrer que $I + ABA^{-1}$ est inversible et calculer son inverse.

Déterminants

Exercice 24. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$. Calculer $\begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ b^2+c^2 & a^2+c^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & a^3+c^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}$.

Exercice 25 (Signature)**.** Au jeu du taquin, on dispose d'un carré de 3×3 cases dont une case est vide. On peut à chaque coup faire pivoter les cases grâce à la case vide. On part de la configuration « bien rangée » à gauche, peut-on arriver à la configuration à droite :

$$\text{Au départ :} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & \blacksquare \\ \hline \end{array} \quad \text{A l'arrivée ?} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & \blacksquare \\ \hline 8 & 3 & 7 \\ \hline 6 & 4 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Indication – En donnant le numéro 9 à la case $\blacksquare$, chaque mouvement du jeu est une transposition entre une case et 9. Donc tout mouvement du jeu est une composée de transpositions de la forme $(9i)$.

Exercice 26. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille libre de E et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de scalaires. On pose $s = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$.

Donner une C.N.S. sur la famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ pour que la famille $(u_i + s)_{1\leq i\leq n}$ soit libre.

Indication – On pourra utiliser le développement du déterminant par multilinéarité.

Exercice 27. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $A = (a^{\max(i,j)})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Calculer $\det(A)$.

Exercice 28. Soit $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } |i-j| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Calculer $\det(A_n)$.

b) Pour quelles valeurs de n la matrice A_n est-elle inversible ?

Exercice 29. Soient $(a,x,y,z) \in \mathbb{R}^4$. Lorsque $n \geq 2$ calculer le déterminant de taille n suivant : $\Delta = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & z & 0 & \dots & 0 \\ y & 0 & z & \ddots & \vdots \\ y & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 & z \end{vmatrix}$.

Exercice 30. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ et :

$$D_n = \begin{vmatrix} x & (x-b) & \dots & (x-b) \\ (x-a) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (x-b) \\ (x-a) & \dots & (x-a) & x \end{vmatrix}.$$

a) Montrer que $D_n(x)$ est un polynôme en x de degré inférieur ou égal à 1.
b) Calculer $D_n(a)$ et $D_n(b)$, et en déduire le calcul de $D_n(x)$ si $a \neq b$.
c) Quid du cas $a = b$?

Exercice 31. Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie n quelconque, $F_1, \dots, F_r$ des s.e.v. strict de E. Le but de cette question est de montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $x \notin \bigcup_{i=1}^r F_i$.

Pour cela, on raisonne *par l'absurde* en supposant que $E = \bigcup_{i=1}^r F_i$.

On fixe une base $\mathcal{B}$ de E et pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, note x_λ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

a) Montrer qu'alors il existe un sous-espace F_{i_0} qui contient n vecteurs $x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_n}$ pour n valeurs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distinctes dans $\mathbb{R}$.

b) Conclure à la *contradiction*

Exercice 32. Soit $\Phi = M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ l'application transposition. Calculer la trace et le déterminant de Φ.

Exercice 33. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\widehat{A}$ sa comatrice. Déterminer le rang de $\widehat{A}$ en fonction du rang de A.