Banque CCINP : Ex 1, 5, 6,7.

Exercice 1. Etudier, suivant la nature du réel (strictement) positif a, la convergence des séries de termes généraux a^n, a^{n^2}, $a^{\sqrt{n}}$, $a^{\ln(n)}$.

Exercice 2. Nature des séries de t.g. $u_n = \cos^n(\dfrac{1}{\sqrt{n}}) - \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, $v_n = (\dfrac{\pi}{2})^\alpha - (\mathrm{Arctan}(n))^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. et $w_n = \arccos(1 - \dfrac{1}{n})^\alpha$.

Exercice 3 (Classique incontournable : séries de Bertrand)**.** a) Banque CCINP : nature de $\sum \dfrac{1}{n \ln^\beta(n)}$. On pourra séparer le cas $\beta \leq 0$ et le cas $\beta \geq 0$.

b) A l'aide du a) déterminer la nature de toutes les séries $\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ pour tous les $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 4 (Oral CCINP 2021 : révisions suites définies implicitement et séries à la fin)**.**

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in]0, 1]$ tel que $\displaystyle\int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t} dt = n$.

b) Etudier la monotonie de (u_n) et sa limite.

c) On pose $v_n = n + \ln(u_n)$. Montrer que (v_n) converge et exprimer sa limite sous forme d'un intégrale.

d) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 5 (Oral CCINP 2021 : série à t.g. décroissant, introduction de la notion de « tranche de Cauchy »)**.**

1) Donner la définition de la convergence d'une série puis montrer que si $\sum u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) Soit (u_n) une suite décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

a) On suppose que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\lambda = 0$.

b) Montrer que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Indication – considérer la « tranche de Cauchy » $\displaystyle\sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n} u_k$, remarquer qu'elle tend vers zéro et la relier à notre problème.

c) Montrer que la série de t.g. $n(u_n - u_{n+1})$ converge puis que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$.

Exercice 6 (Signe variable : T.S.A ou D.A ?)**.** Nature de $\sum u_n$ dans les cas suivants :

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \ln(n)}$. b) $u_n = \ln(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{\alpha}{n})$, c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n \ln(n)}$, suivant $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 (Activité de découverte pour le chapitre I1 suivant)**.**

Montrer que $\displaystyle\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$ n'est pas ACV, mais est semi-CV.

Indication – Commencer par faire un dessin. Pour la semi-convergence, laissons parler Dirichlet (1829) : « On sait que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ a une valeur finie égale à $\pi/2$. Cette intégrale peut être partagée en une infinité d'autres, prises la première depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \pi$, la seconde depuis $t = \pi$ jusqu'à $t = 2\pi$ et ainsi de suites. Ces intégrales sont alternativement positives et négatives et chacune d'elle a une valeur numérique inférieure à la précédente. » Justifier l'affirmation de Johann Peter Gustav, sauf pour la valeur $\pi/2$ que nous verrons plus tard.

Exercice 8 (Séries dont le terme général est lui-même défini à partir d'une série)**.**

a) Nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

b) Soit S_n la somme partielle d'ordre n de la série harmonique alternée. Etudier la convergence de $\sum (-1)^n \dfrac{S_n}{n}$

Indication pour les deux questions : Bien utiliser ce que donne le T.S.A.

Exercice 9 (Lien entre la CV de différentes séries)**.** a) Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Montrer que $\sum u_n$, $\sum \mathrm{Arctan}(u_n)$ et $\sum \dfrac{u_n}{1 + u_n}$ ont même nature.

b) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $\sum u_n^2$ CV alors la suite $(\dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n})$ tend vers zéro.

Lien suite/série

Exercice 10. Etudier la convergence de la *suite* (u_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) - n$$

Exercice 11 (Amélioration de d'Alembert : avec le lien suite/série, critère de Raabe-Duhamel)**.**

a) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, telles que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{\beta}}\right)$ avec $\alpha > 0$ et $\beta > 1$.

Le but de cet exercice est de déduire de ce D.A. un équivalent de u_n de la forme $u_n \sim \dfrac{l}{n^{\alpha}}$, ce qui donne aussi en particulier la nature de $\sum u_n$. La technique mise en oeuvre est très générale : on va se ramener à une série.

On considère $v_n = n^{\alpha} u_n$. Pour montrer que (v_n) converge vers une limite finie non nulle, montrer que $\sum \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ converge et conclure.

b) Application : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déduire du résultat du a) un équivalent de $|\binom{\alpha}{n}|$ quand $n \to +\infty$ de la forme $\dfrac{c}{n^{\beta}}$ avec c non précisé, mais β explicite.

Exercice 12 (suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ cas d'un point fixe indéterminé $|f'(\ell)| = 1$: convergence lente)**.**

a) Soit (u_n) définie par $u_0 \in [0, \pi]$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.
Montrer que $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Chercher $\alpha > 0$ tel que $\dfrac{1}{u_{n+1}^{\alpha}} - \dfrac{1}{u_n^{\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}^*$.

c) En déduire un équivalent de u_n.

Calculs de sommes :

Exercice 13. Convergence et somme de la série $\sum (-1)^n \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.

Exercice 14. En justifiant l'existence de cette somme, calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 15. Soit $u_k = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k}\right).\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 16 (Calculs de sommes de séries à l'aide d'une écriture intégrale)**.** Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ en remarquant que $\dfrac{1}{2k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{2k}\,dt$.

Sommations par paquets et permutations de termes

Exercice 17 (Sommation par paquet de trois)**.** Soit $u_n = \dfrac{1}{n}\cos(2n\pi/3)$.

a) Montrer que $\sum u_n$ n'est pas ACV.
b) En notant $t_n = u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2}$ montrer que $\sum t_n$ est ACV.
c) En déduire que $\sum u_n$ CV.

Exercice 18 (Convergence non commutative des séries DIV : insistance sur le mot sommable.)**.** On sait que la S.H.A. $\sum \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge vers $\ln(2)$.

On réordonne les termes de la série harmonique alternée en considérant les sommes partielles suivantes :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_{3n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4}$$

où l'on somme à la suite un terme positif puis deux termes négatifs dans l'ordre des termes qui apparaîtraient dans la S.H.A.

a) A l'aide au choix, de sommes télescopiques ou du D.A. de H_n, déterminer la limite de (S_{3n}).

b) On note S_n la somme partielle d'ordre n de la même série qui définit (S_{3n}) autrement dit : $S_1 = 1$, $S_2 = 1 - \dfrac{1}{2}$, $S_3 = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}$, $S_4 = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}$ etc.

Déduire du a) que (S_n) converge.