

DEVOIR 6 (3h30)

PROBLÈME : MÉTHODES D'ACCÉLÉRATION DE CONVERGENCE DE SUITES

Idée générale : Lorsqu'une suite (u_n) converge vers une limite ℓ , une *méthode d'accélération de convergence* de (u_n) est une méthode qui permet de remplacer (u_n) par une suite (v_n) déduite de (u_n) et dont le calcul n'est pas beaucoup plus compliqué que celui de (u_n) , ayant la propriété que $(v_n - \ell) = o(u_n - \ell)$ donc qui converge *beaucoup plus vite* vers ℓ que (u_n) .

Les calculatrices (ou python) sont autorisés. Les documents de cours aussi. Les communications entre vous ou internet : non. Arrêt 11h30, scanner et mettre sur la dropbox

N.B. Les parties I d'un côté et II et III de l'autre sont complètement indépendantes. Par ses aspects numériques et ses approximations la partie I 2) peut être un peu surprenante, mais elle veut vous familiariser avec des raisonnements plus *approximatifs* qu'on trouve dans certains sujets d'informatique commune.

Un résultat du II est utilisé au début du III, mais il est rappelé. Pour le reste II et III sont indépendantes.

PARTIE I : MÉTHODES ILLUSTRÉES SUR L'APPROXIMATION DE e

1) L'accélération par les D.L.

- a) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Déterminer un équivalent simple de $e - u_n$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- b) La suite (u_n) du a) converge *lentement* vers e , pas mieux qu'un $O(1/n)$. Une méthode d'accélération de convergence de (u_n) consiste à remplacer (u_n) par la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n(1 + \frac{\alpha}{n})$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est bien choisi ici pour que $v_n - e = O(1/n^2)$. Justifier qu'un tel α existe ici, et expliciter le.
- c) (i) Expliciter un développement asymptotique de $\ln(u_n)$ à la précision $O(1/n^3)$.
 (ii) En écrivant le développement du (i) sous la forme $1 = \ln(u_n) + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + O(\frac{1}{n^3})$, expliciter une suite (w_n) déduite de (u_n) par une formule simple, telle que $w_n - e = O(1/n^3)$ ce qui accélère encore la convergence.

2) Notion générale de coefficient de convergence d'une suite :

Les terminologies et le « style » de ce paragraphes sont celles des maths numériques... c'est un peu dépayasant parfois mais très utile pour des sujets d'informatique aussi.

Définition – Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers un réel ℓ . Supposons en outre qu'à partir d'un certain rang $u_n \neq \ell$. Si la suite $\left(\frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}\right)$ converge vers un nombre λ , alors ce nombre λ s'appelle *coefficient de convergence* de (u_n) . En outre :

- si $|\lambda| = 1$, on dit que la convergence est *lente*,
- si $0 < |\lambda| < 1$, on dit que la convergence est *géométrique*;
- si $\lambda = 0$ on dit que la convergence est *supergéométrique* ou en maths numérique juste *rapide*^a

a. moi je dirais très rapide, ils sont durs en affaires les matheux numériques, car géométrique ça va déjà vite!

- a) Comment qualifieriez vous alors la convergence des suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ du 1)? On utilisera les calculs du 1) sans faire de nouveau calculs. Pour (w_n) on pourra admettre un résultat plus précis que le calcul du 1) c) si besoin.
- b) Justifier que pour une suite (u_n) quelconque qui converge vers ℓ , le nombre de décimales¹

1. chiffres après la virgule

correctes de ℓ obtenues quand on remplace ℓ par u_n est donné par $-\log|u_n - \ell|$ (ou presque).²

On en déduit(*rien à démontrer*) que pour $n, p \in \mathbb{N}$, le « nombre de décimales gagnées » en passant de l'approximation u_n de ℓ à l'approximation u_{n+p} de ℓ est : $-\log \left| \frac{u_{n+p} - \ell}{u_n - \ell} \right|$.

- c) Supposons que (u_n) a une convergence géométrique de coefficient de convergence λ . En remplaçant (abusivement³) pour n grand, $\left| \frac{u_{n+p} - \ell}{u_n - \ell} \right|$ par $|\lambda|$, déterminer la valeur de λ à partir de laquelle « on gagne à peu près une décimale par itération », c'est-à-dire :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{10}|u_n - \ell|$$

- d) Soit (u_n) une suite qui converge *lentement* vers ℓ au sens de la définition de l'encadré. Pour un $n \in \mathbb{N}$ donné si on veut gagner une décimale à partir de l'approximation u_n de ℓ , on veut trouver un nombre $p(n)$ tel que $|u_{n+p(n)} - \ell| \leq \frac{1}{10}|u_n - \ell|$. Justifier que dans ce cas, $p(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Autrement dit, le nombre d'étapes de calculs qu'il faut pour gagner une décimale de plus tend vers l'infini !

- e) Cas des suites à convergence rapide :

On dit par exemple que la convergence est *quadratique* lorsque $\left(\frac{u_{n+1} - \ell}{(u_n - \ell)^2} \right)$ admet une limite finie non nulle.

Comment évolue le nombre de décimales correctes entre $(u_n - \ell)$ et $(u_{n+1} - \ell)$ dans ce cas (avec les mêmes approximations qu'à la question précédente) ?

Remarque : D'une manière générale, lorsque la convergence est supergéométrique, le nombre de décimales justes gagnées à chaque étape tend vers l'infini.

3) Accélération d'une convergence géométrique :

Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers un ℓ avec une convergence géométrique de rapport λ avec $|\lambda| \in]0, 1[$, c'est-à-dire telle que $u_{n+1} - \ell \sim \lambda(u_n - \ell)$.

Soit (v_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \lambda u_n}{1 - \lambda}$.

- a) Montrer que (v_n) converge plus vite vers ℓ que (u_n) c'est-à-dire que $v_n - \ell = o(u_n - \ell)$.
b) On suppose que (u_n) admet un D.A. de la forme $u_n = \ell + \lambda^n + \mu^n + o(\mu^n)$ avec $|\lambda| > |\mu|$. Quel est alors le coefficient de convergence de (v_n) ? Comment trouver une suite (w_n) qui converge encore plus vite vers ℓ ?

4) La méthode précédente appliquée à une suite extraite de la suite (u_n) du 1) :

On revient à la suite $(u_n) = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)$ du 1). On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = u_{2^n}$.

- a) Justifier qu'on peut faire le calcul de $U_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$ à l'aide de seulement n multiplications à partir de $\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.
b) Justifier que la convergence de (U_n) est géométrique et préciser son ordre.
c) Expliciter la suite (V_n) associée à (U_n) par le procédé du 3) et préciser son ordre de convergence.

PARTIE II : PROMENADE AUTOUR D'UNE FORMULE DE CALCUL DE π

Cette partie est consacrée à deux démonstrations de la formule : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

2. Oui, « ou presque », c'est le style maths numériques à vous de faire un énoncé précis mais simple.

3. toujours le style maths numériques

1) **Une démonstration rapide de la formule :**

On note $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$. En remarquant que : $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{2k+1} = \int_0^1 t^{2k} dt$, démontrer que :

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$$

2) **Une démonstration (plus longue) avec Taylor :**

- A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, majorer $|S_n - \frac{\pi}{4}|$ en fonction de $\text{Arctan}^{(n+1)}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Décomposer $\frac{1}{1+x^2}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}$.
- On note i le nombre complexe usuel. En admettant (ce n'est pas difficile) que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(x-i)^k} \right) = \frac{-k}{(x-i)^{k+1}}$, en déduire une expression de $\arctan^{(n+1)}(x)$ à l'aide de i .
- Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |(x+i)^n - (x-i)^n| \leq 2(1+x^2)^{n/2}$.
- Conclure à l'aide de ce qui précède que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$.

PARTIE III : ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE VERS π

1) **Application de la formule du II à la recherche de valeurs approchées de π :**

Avec la méthode et les notations du II 1), on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, |S_n - \pi/4| \leq \frac{1}{2n+3}$. En notant maintenant $u_n = 4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$, et en utilisant cette majoration, donner une C.S. sur n pour que $|u_n - \pi| < 10^{-6}$.

2) **Accélération de la convergence :**

On pose $v_n = S_{2n-1} + \frac{1}{8n}$ et $w_n = S_{2n-1} + \frac{1}{8n+1}$. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes. Donner une C.S. sur n pour que $|4v_n - \pi| < 10^{-6}$.

3) **Une formule miraculeuse :** Démontrer que :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right).$$

4) **Excursion utile : Un théorème pour les séries à signes alternés :**

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante, tendant vers 0. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$. Montrer que les deux suites (A_{2n}) et (A_{2n+1}) sont adjacentes, ce qui donne en particulier que (A_n) converge et que, si on note ℓ sa somme, on a $\forall n \in \mathbb{N}, A_{2n+1} \leq \ell \leq A_{2n}$.

5) **Application de la formule du 3) pour approcher π :**

On remarque (pas besoin de le démontrer) que les preuves faites au § II montrent plus généralement que $\forall x \in [0, 1], \text{Arctan}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$.

La formule du 3) ci-dessus s'écrit encore :

$$\pi = 16 \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right).$$

On note $S = 16 \sum_{k=0}^4 \frac{(-1)^k}{5^{2k+1}(2k+1)} - \frac{4}{239}$, formule obtenue en remplaçant la série définissant $\arctan(\frac{1}{5})$ par sa somme partielle d'ordre 4 et celle définissant $\arctan(\frac{1}{239})$ par sa somme partielle d'ordre 0.

Démontrer que :

$$S - 3 \times 10^{-8} < \pi < S + 10^{-7}$$

Ainsi S qui est une somme de six termes, dont le calcul est élémentaire, donne une meilleure approximation de π qu'avec un million de termes de la suite (u_n) du 1).