

D.M 2. Introduction à la transformée de Laplace
Partie I : Etude sur le domaine de Laplace $]0, +\infty[$

Dans cette partie $f \in \mathcal{CM}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ est telle que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On pose alors :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt,$$

appelée *transformée de Laplace* de f .

Exemple de la transformée de Laplace des fonctions polynomiales :

1) On note $\varepsilon_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^n$.

a) Montrer, par récurrence, en justifiant l'existence de ces transformées, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \mathcal{L}(\varepsilon_n)(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

b) En déduire une formule pour $\mathcal{L}(P)(x)$ pour tout $x > 0$, pour tout $P \in \mathbb{R}[t]$.

c) Montrer que la transformation de Laplace $P \mapsto \mathcal{L}(P)$ est *injective* en restriction à $\mathbb{R}[t]$.

Transformée de Laplace d'une dérivée

2) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que $t \mapsto f'(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

a) Montrer que $f(t)e^{-xt} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

b) En déduire que pour tout $x > 0 : \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

3) Généralisation : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([0, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, t \mapsto f^{(k)}(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Démontrer une formule reliant $\mathcal{L}(f^{(n)})$ à $\mathcal{L}(f)$.

N.B. Vous avez fait usage de ces formules en S.I. pour transformer des E.D. en équations algébriques. Le fait qu'on ne perde pas d'information en faisant cela vient de l'injectivité de la transformée de Laplace, démontrée en fin de DM.

Etude asymptotique de $\mathcal{L}(f)$ en $+\infty$

4) Un cas simple du théorème de la valeur initiale¹ :

On suppose que $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et f' est bornée sur cet intervalle.

Montrer que $\mathcal{L}(f)(x) = \frac{f(0)}{x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$.

5) Généralisation : On suppose que f admet en 0 le développement limité d'ordre n précisé suivant :

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} t^k + O(t^{n+1}).$$

a) Montrer que pour tout $\beta > 0$, on a le développement asymptotique suivant en $+\infty$:

$$\int_0^\beta \left(f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} t^k \right) e^{-tx} dt = O(x^{-n-2}).$$

b) En déduire que, lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a le D.A. :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^{k+1}} + O(x^{-n-2}).$$

1. nous retrouverons ce résultat dans les exercices du chapitre I2 avec des hypothèses plus faibles

Partie II : étude du domaine de Laplace

Soit $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On appelle :

6) Prop-déf. des deux abscisses de convergence :

a) Montrer qu'il existe un unique élément $\sigma_a(f) \in [-\infty, +\infty]$ tel que :

$$\forall x < \sigma_a(f), \mathcal{L}(|f|)(x) = +\infty, \quad \forall x > \sigma_a(f), \mathcal{L}(|f|)(x) < +\infty.$$

Par déf. $\sigma_a(f)$ s'appelle *l'abscisse de convergence absolue* de la transformée de Laplace de f .

b) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que si pour un $x_0 \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x_0 t} f(t) dt$ est convergente (éventuellement semi-convergente) alors pour tout $x > x_0$, $\mathcal{L}(f)(x)$ existe.

c) En déduire qu'il existe un unique élément $\sigma(f) \in [-\infty, +\infty]$ tel que :

$$\forall x < \sigma(f), \mathcal{L}(f)(x) \text{ est une intégrale divergente et } \quad \forall x > \sigma(f), \mathcal{L}(f)(x) \text{ est convergente}$$

Le nombre $\sigma(f)$ s'appelle *abscisse de convergence* de la transformée de Laplace de f .

d) Quelle inégalité relie les nombres $\sigma(f)$ et $\sigma_a(f)$?

7) Un exemple : Soit $x > 0$ et $I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^x} du$.

a) Pour quelles valeurs de x l'intégrale $I(x)$ est elle semi-convergente ? Absolument convergente ?

b) A l'aide d'un changement de variable, voir $I(x)$ comme la transformée de Laplace d'une fonction, et déterminer son abscisse de convergence absolue et de convergence.

8) Un autre exemple : Soit $f(x) = \exp(ie^{4x})$.

a) Déterminer $\sigma_a(f)$.

b) Montrer que pour $x = -2$ l'intégrale $\mathcal{L}(f)(x)$ est semi-convergente.

9) Une majoration : si $\mathcal{L}(f)(x_0)$ est convergente et si $x_0 \geq 0$ alors il existe une constante C telle que :

$$\forall t \geq 0, \left| \int_0^t f(u) du \right| \leq C \exp(x_0 t).$$

Partie III : Une excursion topologique (5/2) : fonctions continues dont tous les moments sont nuls

10) (Admis pour les 3/2 pour la suite) A l'aide du théorème d'approximation de Weierstrass, montrer que si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b f(t) t^n dt = 0,$$

alors $f = 0$ sur $[a, b]$.

Partie IV : injectivité de la transformée de Laplace

Soit $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R}^+, \mathbb{K})$ on suppose qu'on a un x_0 tel que $\mathcal{L}(f)(x_0)$ soit ACV.

11) Soit g_x la fonction définie par : $\forall t > 0, g_x(t) = \int_0^t e^{-xu} f(u) du$ et soit $a > 0$. Montrer que :

$$\forall x \geq x_0, \mathcal{L}(f)(x+a) = a \mathcal{L}(g_x)(a).$$

12) On suppose que pour un $x \geq x_0$ fixé et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}(f)(x+na) = 0$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 g_x\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right) u^n du = 0.$$

En déduire que la fonction g_x est nulle.

13) En déduire que si f est continue sur $\mathbb{R}^+$ vérifie que pour tout $x \geq x_0$, $\mathcal{L}(f)(x) = 0$, alors $f = 0$ sur $\mathbb{R}^+$.