

D.M.1. Bases discrètes, solutions

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \varepsilon_n b_n \leq b_n$ d'où la convergence de $\sum \varepsilon_n b_n$ par comparaison des séries à termes positifs.

De plus par sommation des inégalités précédentes, $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n b_n \leq B$.

- 2) a) Par positivité des $\varepsilon_k b_k$, $S(\varepsilon) \geq \sum_{k=0}^n \varepsilon_k b_k = \sum_{k=0}^n b_k = B_n$.
- b) Pour tout $N \geq n$, $\sum_{i=0}^N \varepsilon_i b_i \leq B_N - b_k \leq B_N - b_n$ d'après les hypothèses sur ε et (b_n) décroissante.
- Le passage aux limites quand N tend vers $+\infty$ donne $S(\varepsilon) \leq B - b_n$.
- 3) D'abord un point de départ :

Psychologiquement, cette question doit utiliser les remarques faciles faites au 2).

Par l'absurde s'il existe un $n \in \mathbb{N}$, tel que $b_n > \beta_n$. Cela signifie que $b_n > B - B_n$, ou encore que $B_n > B - b_n$ (H) (ceci pour se ramener aux objets du 2)).

Or par le 2), pour tout $\varepsilon \in C$, $S(\varepsilon) \geq B_n$ ou $B - b_n \geq S(\varepsilon)$.

Avec (H), on en déduit que l'intervalle $]B - b_n, B_n[$ n'est pas atteint par S , contradiction avec la surjectivité de S .

- 4) a) Par réc., on note $H(n) : \sigma_n \leq \sigma$.
- $H(0)$ est vraie par déf. de $\sigma_0 = 0 \leq \sigma$.
 - On suppose que $H(n)$ est vraie pour un certain n . La déf. de σ_{n+1} donne alors que $\sigma_{n+1} \leq \sigma$.
- Ainsi la réc. est établie.
- b) Encore par réc., on note ici $H(n) : \sigma_n + b_n + \beta_n \geq \sigma$.
- $H(0)$ est vraie car $\sigma_0 + b_0 + \beta_0 = 0 + b_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k = B \geq \sigma$.
 - Supposons $H(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a donc $\sigma_n + b_n + \beta_n \geq \sigma$.
- 1er cas : $\sigma_n + b_n > \sigma$ (1).
- Dans ce cas, par la déf de σ_{n+1} , $\sigma_{n+1} + b_{n+1} + \beta_{n+1} = \sigma_n + b_{n+1} + \beta_{n+1} = \sigma_n + \beta_n$ (2)
- Et par l'hypothèse $\beta_n \geq b_n$, on sait que $\sigma_n + \beta_n \geq \sigma_n + b_n$ ce qui, avec (2) donne :

$$\sigma_{n+1} + b_{n+1} + \beta_{n+1} \geq \sigma_n + b_n \stackrel{(1)}{>} \sigma.$$

2ème cas : $\sigma_n + b_n \leq \sigma$ (3).

Dans ce cas, par la déf de σ_{n+1} , $\sigma_{n+1} + b_{n+1} + \beta_{n+1} = \sigma_n + b_n + b_{n+1} + \beta_{n+1} = \sigma_n + b_n + \beta_n \geq \sigma$ par $H(n)$.

Dans les deux cas, on a montré que $H(n+1)$ est vraie. La réc. est établie.

- c) Par a) et b), on a l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_n - b_n - \beta_n \leq \sigma_n \leq \sigma \quad (\dagger)$$

Or comme $\sum b_n$ converge, on sait que (b_n) et (β_n) tendent vers zéro.

Donc par théorème des gendarmes, avec $(\dagger)$ on a. $\sigma_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sigma$.

Remarque : (σ_n) converge vers σ en croissant.

- d) Soit $\sigma \in [0, B]$. On définit (σ_n) comme précédemment. On définit une suite $(\varepsilon_n) \in C$, en posant : $\forall n \in \mathbb{N}$,
- $$\begin{cases} \varepsilon_n = 0, & \text{si } \sigma_{n+1} = \sigma_n \\ \varepsilon_n = 1, & \text{si } \sigma_{n+1} = \sigma_n + b_n \end{cases}.$$

Alors par réc. immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_{n+1} = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k b_k$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S(\varepsilon)$ et donc $S(\varepsilon) = \sigma$ d'où la surjectivité de S .

- 5) a) Comme $q \in]0, 1[$, on sait que (q^n) est décroissante, positive et $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} < +\infty$.
 b) Au 3) et 4) on a montré que (b_n) est une base discrète ssi $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \leq \beta_n$.
 Ici $b_n = q^n$ et $\beta_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}$.
 Donc la CNS cherchée est $\forall n \in \mathbb{N}, q^n \leq \frac{q^{n+1}}{1-q}$ ce qui comme $q > 0$ équivaut simplement à : $1 \leq \frac{q}{1-q}$ et comme $1-q > 0$, équivaut encore à $1-q \leq q$ donc finalement :

$$\boxed{(q^n) \text{ est une base discrète ssi } q \geq 1/2}$$

Remarque : pour $q = 1/2$, la surjectivité de S correspond à l'existence du développement dyadique.

- 6) a) Par la CNS du 3 et 4, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, b'_n \leq \beta'_n$.
 Or pour tout $n \in \mathbb{N}, b'_n = b_{n+1} \stackrel{*}{\leq} \beta_{n+1} = \sum_{k=n+2}^{+\infty} b_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b'_k = \beta'_n$.
 L'inégalité (*) est vraie car (b_n) est une base discrète, les autres égalités sont données par les déf.
 Donc la prop. est vérifiée.
 b) Comme (b'_n) est une base discrète, en notant $B' = \sum_{n=0}^{+\infty} b'_n$, tout réel dans $[0, B']$ peut s'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon'_n b'_n$ pour une certaine suite $(\varepsilon'_n) \in C$.
 Or $B' = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B - b_0 \geq b_0$.
 Donc $b_0 \in [0, B']$ peut s'écrire $b_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon'_n b_{n+1}$. En posant $\varepsilon_0 = 0$ et $\forall n \geq 1, \varepsilon_n = \varepsilon'_{n-1}$, on a $b_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_{n+1} b_{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n b_n = S(\varepsilon)$ car $\varepsilon_0 = 0$.
 c) Comme S est surjective, la suite (b_n) est une *base discrète*.
 Soit ε comme au b). Soit $\eta \in C$ telle que $\eta_0 = 1$ et $\eta_n = 0$ pour tout $n > 0$. Alors $S(\eta) = b_0 = S(\varepsilon)$ et $\eta \neq \varepsilon$ car $\eta_0 \neq \varepsilon_0$. Donc S n'est pas injective.
 7) **N.B.** L'hypothèse de l'énoncé est la négation de celle donnant la surjectivité. Donc la question posée consiste à montrer que lorsque S n'est pas surjective, elle est injective.
 Par l'absurde, soit (ε_n) et (ε'_n) distinctes dans C telles que $S(\varepsilon) = S(\varepsilon')$.
 Soit $r = \min\{k \in \mathbb{N}, \varepsilon_k \neq \varepsilon'_k\}$.
 Alors $\varepsilon_r b_r + \sum_{k>r} \varepsilon_k b_k = \varepsilon'_r b_r + \sum_{k>r} \varepsilon'_k b_k$.
 Comme ε_r et ε'_r sont dans $\{0, 1\}$ et distincts, supposons SRdG, que $\varepsilon_r = 1$ et $\varepsilon'_r = 0$.
 Alors $b_r + \sum_{k>r} \varepsilon_k b_k = \sum_{k>r} \varepsilon'_k b_k \leq \beta_r$ donc $b_r \leq \beta_r$.
 Or par hyp. $\beta_r < b_r$, contradiction.
 8) a) Comme $x \mapsto \ln(1+x)$ est croissante, positive sur $\mathbb{R}^+$, et que $n \mapsto 1/2^n$ est décroissante, on en déduit que (b_n) est décroissante et à valeurs positives.
 Comme $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}$ par théorème pour les équivalents pour les séries à termes positifs, on en déduit que : $\sum b_n$ converge car la série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ converge.
 Donc (b_n) vérifie les hypothèses du début du problème.

- b) En notant $f : x \mapsto \ln(1+x)$, il s'agit de montrer que $f\left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} f\left(\frac{1}{2^k}\right)$.

Autrement dit, il suffit de montrer que la fonction f vérifie pour tout x, y dans $\mathbb{R}^+$, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Il est toujours bon de lire tout l'énoncé : cette prop. est celle qui sera utilisée de manière générale au 10.
Cette propriété s'appelle la *sous-additivité*.

En anticipant sur le 10, toute fonction dérivable, croissante, concave telle que $f(0) = 0$ vérifie cette propriété.

Prouvons-le avec encore une hyp. plus faible : la concavité et $f(0) \geq 0$ suffisent

On fixe un $x \in \mathbb{R}^+$. On considère la fonction $\varphi_x : y \in \mathbb{R}^+ \mapsto f(x+y) - f(x) - f(y)$.

Alors φ_x est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\varphi'_x(y) = f'(x+y) - f'(y) \leq 0$ car f' est décroissante.

Donc $\varphi'_x \leq 0$ et donc φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et comme $\varphi_x(0) = f(y) - f(0) - f(y) = -f(0) \leq 0$ on conclut que φ_x est négative sur $\mathbb{R}^+$ $\square$

Exercice : prouver cela sans hyp. de dérivabilité.

- c) D'après le 4., ISMQ $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq \beta_n$ ou encore que : $b_n \leq B - B_n$.
Or l'inégalité du b) avec $p \rightarrow +\infty$ donne :

$$\ln\left(1 + \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{-k}\right) \leq B - B_n$$

et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{-k} = 2^{-n}$ donc :

$$b_n \leq B - B_n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

- 9) a) Par continuité de exp, comme $\sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sigma$, on a $e^{\sigma_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\sigma$.
b) Par déf., dans le cas étudié, on a $\sigma_{n+1} = \sigma_n + b_n$, donc $e^{\sigma_{n+1}} = e^{\sigma_n} \cdot e^{b_n}$.
Par déf. de $b_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$, on en déduit que $e^{\sigma_{n+1}} = e^{\sigma_n} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = e^{\sigma_n} + \frac{e^{\sigma_n}}{2^n}$ ce qui correspond aux opérations demandées.
c) (i) Par déf. $\beta_n = \sum_{k \geq n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

Or pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ par concavité du ln comparaison avec sa tangente au point d'abscisse 1.

Donc ici $\beta_n \leq \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$ (somme géométrique) donc $\boxed{\beta_n \leq \frac{1}{2^n}} \quad (1)$.

(ii) Comme (b_n) est une base discrète, les hypothèses de la question 4. sont vérifiées. On a montré au 4. b) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n + b_n + \beta_n \geq \sigma$.

Donc $\sigma - \sigma_n \leq b_n + \beta_n \quad (2)$.

On a vu au (i) que $b_n \leq \frac{1}{2^n}$ et que $\beta_n \leq \frac{1}{2^n}$ cf (1).

Donc dans (2), on obtient $\boxed{\sigma - \sigma_n \leq \frac{2}{2^n} = 2^{-n+1}}$

- d) On peut transformer l'expression donnée par l'énoncé (qui est un « écart relatif ») :

$$\frac{e^\sigma - e^{\sigma_n}}{e^\sigma} = 1 - e^{\sigma_n - \sigma} \quad (1)$$

Par convexité de l'exp. et comparaison avec sa tangente en 0, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

Donc $e^{-x} \geq 1 - x$ et $1 - e^{-x} \leq x$
 et pour $x = \sigma - \sigma_n$, on obtient :

$$1 - e^{\sigma_n - \sigma} \leq \sigma - \sigma_n \quad (2)$$

Avec (1), (2) et le résultat final du c), on obtient bien ;

$$\frac{e^\sigma - e^{\sigma_n}}{e^\sigma} \leq 2^{-n+1}$$

- 10) a) Comme f est croissante et (b_n) est décroissante, $(b'_n) = (f(b_n))$ est décroissante par composition et positive car f est à valeurs positives.

Pour la convergence de la série : comme f est concave, dérivable et $f(0) = 0$, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq f'(0)x$ comparaison à la tangente en 0.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b'_n \leq f'(0)b_n$.

Par comparaison pour les S.T.P., comme $\sum b_n$ CV, on en déduit que $\sum b'_n$ CV.

comme $\sum b'_n$ est une série de réel positifs, elle converge ssi elle est *majorée*.

Comme f est croissante et que $\sum b_n$ converge, les sommes partielles (B_n) sont majorées par un $M > 0$ et par f croissante, les $f(B_n)$ sont majorées par $f(M)$.

- b) Fait au 8. b) avec des hypothèses plus faibles.

- c) Il s'agit encore de voir que $b'_n \leq \beta'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. $f(b_n) \leq \sum_{k>n} f(b_k)$ (*) pour tout n .

Or comme $b_n \leq \sum_{k>n} b_k$ et que f est croissante, $f(b_n) \leq f(\sum_{k>n} b_k)$ (1).

Comme f est sous-additive, pour tout $N > n$, $f(\sum_{k=n+1}^N b_k) \leq \sum_{k=n+1}^N f(b_k)$ et par passage à la limite quand $N \rightarrow +\infty$, on a $f(\sum_{k>n} b_k) \leq \sum_{k>n} f(b_k)$ (2).

Avec (1) et (2) on a (*).

N.B Ainsi la construction du 8 est cas particulier de cette construction.