

CONCOURS BLANC MPSI

Epreuve de mathématiques

Durée: 4h

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code barres correspondant à l'épreuve commune de Mathématiques.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

Remarque importante :

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PREMIER PROBLÈME

Partie A

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et positive. On note, pour tout n entier naturel :

$$u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Prouver que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \max_{t \in [0,1]} f(t)$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Pour tout n entier naturel, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

3. Établir que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

On note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

4. Montrer que, pour tout n entier naturel, $S_n = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} f(t) dt$.
5. Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} f(t) dt = 0$. En déduire que $\ell = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt$.

6. (a) Dans cette question seulement, on choisit $f(t) = 1$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$.
- (b) Dans cette question seulement, on choisit $f(t) = \sqrt{t}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Partie B

On conserve les notations de la partie A, en supposant en plus l'application f de classe C^2 sur $[0, 1]$, et on pose pour tout réel $t \in [0, 1]$, $g(t) = \frac{f(t)}{1+t}$.

7. Prouver que, pour tout n entier naturel :

$$\int_0^1 t^{n+1} g(t) dt = \frac{f(1)}{2(n+2)} + \frac{f(1) - 2f'(1)}{4(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \int_0^1 t^{n+3} g''(t) dt.$$

8. Montrer que $\frac{1}{n+2} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ lorsque n tend vers $+\infty$, où α et β sont deux constantes à déterminer. Calculer de même le développement limité de $\frac{1}{(n+2)(n+3)}$ à l'ordre 2.
9. Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^{n+3} g''(t) dt = 0$.
10. En déduire que $S_n = \ell + \gamma \frac{(-1)^n}{n} + \delta \frac{(-1)^n}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ lorsque n tend vers $+\infty$, où γ et δ sont deux constantes à déterminer.

Partie C

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour tout n entier naturel, on pose :

$$\begin{cases} \Delta^0 a_n = a_n \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \Delta^k a_n = \Delta^{k-1} a_n - \Delta^{k-1} a_{n+1} \end{cases}.$$

11. Exprimer $\Delta^k a_n$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ le plus simplement possible.
12. Démontrer que, pour tout k et n entiers naturels, $\Delta^k a_n = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} a_{n+i}$.
13. Soient $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ , et pour tout n entier naturel, $a_n = \varphi^{(n)}(0)$. Prouver que, pour tout k entier naturel, $\Delta^k a_0 = \psi^{(k)}(0)$, où $\psi(t) = \varphi(-t) e^t$. (On rappelle que la notation $\psi^{(k)}$ désigne la dérivée k^e de la fonction ψ .)
14. Dans cette question, on veut déterminer $\Delta^k a_0$ si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $a_n = \frac{1}{n+1}$.
- (a) Calculer dans ce cas $\Delta^k a_0$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Que conjecturez-vous ?
- (b) Justifier que l'application $\varphi : t \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{e^t - 1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0. On admet que l'application φ ainsi prolongée en 0 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- (c) Soit n un entier naturel. Calculer le développement limité de φ en 0 à l'ordre n . En déduire l'expression de $\varphi^{(n)}(0)$.
- (d) En utilisant la question C.13, déterminer l'expression de $\Delta^k a_0$, pour k entier naturel.

Partie D

On reprend les notations de la partie A, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant toujours définie par $u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$.

15. En utilisant la question C.12, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Delta^k u_0 = \int_0^1 (1-t)^k f(t) dt$.

Pour tout n entier naturel non nul, on pose $S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta^{k-1} u_0}{2^k}$.

16. Prouver que, pour tout n entier naturel non nul, $S'_n = \ell - \frac{1}{2^n} \int_0^1 (1-t)^n \frac{f(t)}{1+t} dt$.

17. En déduire la limite de la suite $(S'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

18. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k 2^k}$.

DEUXIÈME PROBLÈME

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$ —espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

Pour tout réels a et b , on définit la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivante :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ainsi que le nombre complexe $\omega = a + ib$, que l'on note aussi $\omega = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Partie A

Considérons $\mathcal{H} = \{M_{a,b} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Préciser la dimension et une base de $\mathcal{H}$.
2. Pour tout a, b, c, d réels, prouver que $M_{a,b} \times M_{c,d} = M_{e,f}$ où e et f sont deux réels que l'on exprimera en fonction de a, b, c, d .
3. Calculer $M_{a,b} \times M_{a,-b}$. En déduire que si la matrice $M_{a,b}$ est inversible, alors son inverse $M_{a,b}^{-1}$ appartient aussi à $\mathcal{H}$.
4. Montrer que, pour tout n entier naturel :

$$(M_{a,b})^n = \rho^n M_{\cos(n\theta), \sin(n\theta)}.$$

Dans toute la suite du problème, a et b désignent deux nombres réels, avec b non nul.

Partie B

Notons $\mathcal{F}$ le $\mathbb{R}$ —espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et G le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par les deux fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto e^{ax} \sin(bx) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto e^{ax} \cos(bx).$$

Enfin, on désigne par ψ l'application qui, à toute fonction $f \in G$, associe sa dérivée f' .

5. Montrer que la famille (f_1, f_2) est une base de G .
6. Justifier que ψ est un endomorphisme de G , et déterminer la matrice M associée à ψ dans la base (f_1, f_2) .
7. Prouver que toute fonction appartenant à G admet une unique primitive appartenant à G . Déterminer, en utilisant la matrice M , l'unique primitive de f_1 appartenant à G .
8. Vérifier que la matrice M^2 peut s'écrire comme combinaison linéaire de M et de la matrice unité I . En déduire que G est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle que l'on précisera.

Partie C

E désigne un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, et φ l'endomorphisme de E ayant pour matrice $M_{a,b}$ dans la base $\mathcal{B}$.

9. Montrer que $\text{Ker}(\varphi - \omega \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(\varphi - \bar{\omega} \text{id}_E)$ sont deux droites vectorielles de E , engendrées respectivement par les vecteurs $u = e_1 - i e_2$ et $v = e_1 + i e_2$.
10. Justifier que la famille $\mathcal{B}' = (u, v)$ est une base de E .
Préciser la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et calculer son inverse P^{-1} .
11. Déterminer sans calcul la matrice D associée à φ dans la base $\mathcal{B}'$, et exprimer $M_{a,b}$ en fonction de D , P et P^{-1} .
12. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la matrice D^n en fonction de n , ρ et θ . Retrouver ainsi le résultat de la question A.4.

Partie D

A la matrice $M_{a,b}$ on associe la fonction $h_{M_{a,b}}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{a}{b}\}, \quad h_{M_{a,b}}(x) = \frac{a x - b}{b x + a}.$$

13. Construire le tableau de variation de la fonction $h_{M_{a,b}}$ et justifier que $h_{M_{a,b}}$ forme une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{a}{b}\}$ sur une partie de $\mathbb{R}$ à préciser.
14. Prouver que $(h_{M_{a,b}})^{-1} = h_{(M_{a,b})^{-1}}$.

On veut construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en utilisant la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = h_{M_{a,b}}(x_n) = \frac{a x_n - b}{b x_n + a} \end{cases}$$

15. A quelle condition sur a et b peut-on construire x_1 ? peut-on construire x_2 ?
16. Supposons que l'on ait pu construire la suite jusqu'à un certain rang x_n inclus.
 - (a) Établir qu'il existe un réel μ_n non nul tel que $(M_{a,b})^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_n \begin{pmatrix} x_n \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - (b) En déduire une expression de x_n dépendant uniquement de n et θ .
 - (c) Vérifier que l'on peut construire x_{n+1} si, et seulement si, $\cos((n+1)\theta) \neq 0$.
17. Montrer que l'on peut construire tous les termes de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si, et seulement si,

$$\theta \notin \left\{ \frac{2p+1}{2q} \pi \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

FIN DE L'ÉPREUVE