Solutions des exercices de la fin de la pl. 57

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire, de degré n. On suppose que toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$ vérifient $|z| < 1$. Montrer que $P = X^n$.

Solution 7 On écrit $P = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}X + (-1)^n\sigma_n = (X - z_1)\dots(X - z_n)$.

L'énoncé donne que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|z_i| < 1$.

On a donc $\sigma_n = z_1 \dots z_n$, qui vérifie $|\sigma_n| < 1$ et $\sigma_n \in \mathbb{Z}$, donc $\sigma_n = 0$. *idée : on a alors $P = XQ(X)$ avec $Q \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire qui vérifie encore que toutes les racines de Q sont de module strictement inférieure à 1. Donc à son tour le coeff. constant de Q est nul. On peut conclure en disant "par récurrence immédiate". Pour faire plus propre, rédigeons la récurrence.*

Rédaction par récurrence Montrons la propriété par récurrence sur le degré.

• Initialisation : si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire de degré 1, $P = X - a$, a est racine, $|a| < 1$ et $a \in \mathbb{Z}$ force $a = 0$.

• H.R. : on suppose la prop. vraie pour tous les polynômes de degré $n-1$ où $n \geq 2$ est donné.

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire, de degré n, tel que toutes les racines z_i de P dans $\mathbb{C}$ vérifient $|z_i| < 1$.

La preuve ci-dessus montre que $\sigma_n = 0$, donc que $P = XQ(X)$ où Q vérifie l'H.R., donc $Q = X^{n-1}$, donc $P = X^n$.

La réc. est établie. □

Exercice 8 (Très technique)**.** Soit $P = X^5 + X^4 + 2X^3 + 1$ de racines complexes $z_1, \dots, z_5$.

Calculer $\sum_{1 \leq i \neq j \leq 5} z_i^2 z_j$.

Solution 8 **M1** Notons $R = \sum_{1 \leq i \neq j \leq 5} z_i^2 z_j$ la somme qu'on veut calculer.

On remarque que $R = \sum_{1 \leq i,j \leq 5} z_i^2 z_j - \sum_{i=j \in [\![1,5]\!]} z_i^2 z_j$.

Autrement dit $R = (\sum_{i=1}^{5} z_i^2)(\sum_{j=1}^{5} z_j) - \sum_{i=1}^{5} z_i^3 = s_2 s_1 - s_3$, en notant $s_k = \sum_{i=1}^{5} z_i^k$ la k-ième *somme de Newton* des racines de P.

On connaît $s_1 = -1$ par lien coeff./racines.

On calcule $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1 - 2 \times 2 = -3$.

On calcule enfin s_3 plus difficilement que dans le cas des polynômes du troisième degré (où la *méthode de Newton* s'applique).

Ici, on part courageusement de $\sigma_1^3 = s_3 + 3 \sum_{1 \leq i \neq j \leq 5} z_i^2 z_j + 6\sigma_3$.

Il faut bien comprendre cette formule du "multinôme" : quand on développe $(x_1 + \cdots + x_n)^3$ cela revient dans chaque parenthèse à choisir parmi $x_1, \dots, x_n$.

• *si on choisit le même dans chaque parenthèse on a un x_i^3 : on a ainsi la somme des x_i^3.*

• *si dans deux parenthèses on choisit le même et dans la troisième, on a un $x_i^2 x_j$: combien de façons d'avoir le même $x_i^2 x_j$: autant que de choisir 2 parenthèses parmi les trois : $\binom{3}{2} = 3$*

• *si dans chaque parenthèse on choisit un terme différent, on a $x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}$ avec $i_1 < i_2 < i_3$. Combien de façon d'avoir le même produit $x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}$: le nombre de façons de permuter les parenthèses* 3!.

Mais alors en voyant cette formule, on y retrouve notre inconnue R qu'on a déjà exprimée en fonction de s_1, s_2 et s_3.

Et donc en remplaçant R par son expression, on trouve :

$2s_3 = 2\sigma_1^3 - 6\sigma_1\sigma_2 + 6\sigma_3$.

Finalement ici $s_3 = -5$ et $R = 8$. □

M2 Notons R la somme cherchée :

on commence par écrira concrètement ce à qui ressemble R

$R = z_1^2(z_2 + z_3 + z_4 + z_5) + z_2^2(z_1 + z_3 + z_4 + z_5) + \cdots$.

Et on a l'idée de l'écrire $R = z_1^2(s - z_1) + z_2^2(s - z_2) + \cdots = (\sum z_1^2)s - \sum z_1^3$.

Autrement dit $R = s_2 s - s_3$ et on finit comme précédemment. □

Exercice 9 (Définition et prop. fond. du résultant, plus pour les problèmes d'écrits)**.** Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ dans $\mathbb{K}[X]$ avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$.

Définition : On appelle *matrice de Sylvester* de P et Q, et on notera $S(P,Q)$ la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}_{m+n-1}[X]$ du système de vecteurs :

$$(P, XP, \dots, X^{m-1}P, Q, XQ, \dots, X^{n-1}Q) \quad (\dagger)$$

a) Le but de cette question est de montrer que $P \wedge Q = 1$ si, et seulement si, $S(P,Q)$ est inversible. Par définition le déterminant $\det(S(P,Q))$ s'appelle le *résultant* de P et Q, et est noté $R(P,Q)$.

(i) Soient $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ deux polynômes non nuls. Montrer que P et Q ne sont pas premiers entre eux si, et seulement si, il existe un couple $(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $\deg(U) < \deg(Q)$ et $\deg(V) < \deg(P)$ et $PU + QV = 0$.

(ii) Déduire du (i) le résultat annoncé à savoir que la famille (†) est libre si, et seulement si, $P \wedge Q = 1$.

(iii) Calculer $R(P,Q)$ si P et Q sont deux polynômes de degré un.

(iv) Calculer $R(P,Q)$ si P est un polynôme quelconque et Q est un polynôme de degré un.

b) Application au discriminant : si $P \in K[X]$, on appelle *discriminant de* P le nombre : $\Delta(P) = R(P,P')$.

(i) Quelle propriété est-elle caractérisée par l'égalité $\Delta(P) \neq 0$?

(ii) Calculer $\Delta(P)$ si $P = aX^2 + bX + c$ et si $P = X^3 + aX + b$.

Solution 9 a) (i) Sens $\Rightarrow$: Si P et Q ne sont pas premiers entre eux, alors soit D un diviseur commun non trivial. On peut écrire $P = P_1 D$ et $Q = Q_1 D$ avec $\deg(D) \geq 1$. Donc $Q_1 P = P_1 Q = P_1 Q_1 D$. Ainsi, en posant $U = Q_1$ et $V = -P_1$, on a un couple comme demandé.

Sens $\Leftarrow$: si on a $PU = -QV$ et si, *par l'absurde*, $P \wedge Q = 1$. Alors comme P divise QV, par théorème de Bézout P divise V. Or $\deg(P) < \deg(V)$ par hypothèse, d'où la *contradiction.* □

(ii) Vu le (i), on va montrer l'équivalence des négations :

On veut montrer que P et Q ne sont pas premiers entre eux si, et seulement si, $(P, XP, \dots, X^{m-1}P, Q, XQ, \dots, X^n$ est liée.

Or cette dernière condition équivaut à à dire qu'il existe des éléments $(u_0, \dots, u_{m-1}, v_0, \dots, v_{n-1})$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{k=0}^{m-1} u_k X^k P + \sum_{k=0}^{n-1} v_k X^k Q = 0$$

En posant $U = \sum_{k=0}^{m-1} u_k X^k$ et $V = \sum_{k=0}^{n-1} v_k X^k$, cette condition équivaut à l'existence d'un couple (U,V) vérifiant le a) : $UP + VQ = 0$ avec au moins l'un des deux polynômes non nul et donc l'autre aussi car P et Q ne sont pas nuls. D'où l'équivalence.

La suite est plus facile, je vous laisse le plaisir du calcul de ces exemples concrets.