Utilisation des polynômes formels pour prouver des formules

Exercice 1 (Pour voir si on a bien compris le "produit de Cauchy")**.**

a)Calculer $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ en considérant $(1+X)^{2n}$.

b) Calculer $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2$ en considérant $(1-X^2)^n$.

Exercice 2 ($*$)**.** Soit p un nombre premier et $(a,b)\in\mathbb{N}^2$. Montrer que $\binom{pa}{pb}\equiv\binom{a}{b}\,[p]$.
Indication – Se laisser inspirer par l'exercice précédent, mais cette fois dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 3 (Fermat entraîne Wilson)**.** a) En arithmétique le *théoreme de Wilson* dit que si p est un nombre premier alors $(p-1)!\equiv -1\,[p]$. Sauriez-vous donner une preuve de ce résultat avec les outils du cours d'arithmétique (C1) ?

b) On se propose de montrer le résultat du a) à l'aide des polynômes dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$.

Si on factorise $X^{p-1}-1$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ alors, comme il admet pour racines.... et donc en évaluant en 0...

Structure vectorielle de $\mathbb{K}[X]$

Exercice 4. Soient $a_0,\dots,a_n$ des nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que $((X-a_0)^n,\dots,(X-a_n)^n))$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 5 (Interpolation d'Hermite)**.** Soit $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ deux à deux distincts. Soit $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ quelconques. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P\in\mathbb{R}_{2n-1}[x]$ tel que $\forall\, i\in[[1,n]]$, $P(x_i)=a_i$ et $P'(x_i)=b_i$.

Division euclidienne

Exercice 6. a) Soit $\mathbb{K}$ un corps et $P\in\mathbb{K}[X]$. Soient a,b dans $\mathbb{K}$ avec $a\neq b$. Soient λ et μ les restes de la division euclidienne de P par $X-a$ et $X-b$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $A=X^{4n}+2X+1\in\mathbb{R}[X]$. Calculer le reste de la division euclidienne de A par $B=X^2-1$.

c) Soit $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ et $A=(X\sin(\alpha)+\cos(\alpha))^n$. Calculer le reste de la division euclidienne de A par $B=X^2+1$.

d) Expliciter le reste de la division euclidienne de $(X+\sqrt{3})^{17}$ par X^2+1.

e) Soit $P\in\mathbb{K}[X]$. Soit $a\in\mathbb{K}$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

f) Soit $P=aX^{n+1}+bX^n+1$ avec $(a,b)\in\mathbb{K}^2$. Déterminer (a,b) pour P soit divisible par $(X-1)^2$ et calculer alors le quotient.

g) Montrer que $P=(X-2)^{2n}+(X-1)^n-1$ est divisible par X^2-3X+2. Déterminer le quotient.

Exercice 7. Déterminer les réels a et b pour que $A(X)=aX^{n+1}+bX^n+1$ soit divisible par $B=X^2+X+1$ et déterminer le quotient.

Décomposition en polynômes irréductibles et utilisation de la D.P.I.

Exercice 8. Décomposer en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes : X^4+1, X^4+X^2+1, $(X^2-X+1)^2+1$.

Exercice 9. a) Pour deux entiers n et m, déterminer explicitement $\mathbb{U}_n\cap\mathbb{U}_m$.

b) *En déduire* le p.g.c.d. de X^n-1 et X^m-1 dans $\mathbb{C}[X]$.

c) Soient p et q deux entiers premiers entre eux. Montrer que : $A=(X-1)(X^{pq}-1)$ est divisible par $B=(X^p-1)(X^q-1)$.

Exercice 10 (Un grand classique)**.** a) Soit $\mathcal{A}=\{P\in\mathbb{R}[X],\exists\,(A,B)\in\mathbb{R}[X]^2,\ P=A^2+B^2\}$.

Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par $\times$.

Indication – Utiliser une identité qu'on voit bien avec les nombres complexes.

b) Il est clair que $\forall\,P\in\mathcal{A}$, P est à valeurs positives, i.e. $\forall\,x\in\mathbb{R}$, $P(x)\geq 0$. On demande ici de montrer que la réciproque est vraie.

Indication – Penser à décomposer P en irréductibles sur $\mathbb{R}$.