

Calculs par récurrences...

Exercice 1. Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $A_n \in M_{2n}(\mathbb{K})$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, $A_n(i, i) = a$ et pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 2n \rrbracket^2$ tels que $i + j = 2n + 1$, $A_n(i, j) = b$, toutes les autres entrées de A_n étant nulles.

Exercice 2. Soit $(a, b) \in K^2$ avec $a \neq b$. On pose $A_n = \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix}$. Calculer $\det(A_n)$.

Exercice 3 (Centrale Python). La suite (F_n) est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Calculer le déterminant D_n de la matrice $(F_{|i-j|})_{0 \leq i, j \leq n-1}$ après avoir conjecturé le résultat à l'aide de PYTHON. (On pourra s'aider de la doc. de Centrale algèbre linéaire).

Autour de V...

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \dots & \dots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \dots & \dots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a & (a-1) & \dots & \dots & a-n \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}$

Exercice 5 (Utilisation d'un Vandermonde pour un résultat de divisibilité). Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\binom{a}{k} = \frac{a(a-1) \dots (a-k+1)}{k!}$.

A l'aide du déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \binom{a_1}{1} & \binom{a_1}{2} & \dots & \binom{a_1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{a_n}{1} & \binom{a_n}{2} & \dots & \binom{a_n}{n-1} \end{vmatrix}$, montrer que $\prod_{1 \leq k < l \leq n} (a_l - a_k)$ est divisible par $\prod_{1 \leq k < l \leq n} (l - k)$.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension finie n quelconque, $F_1, \dots, F_r$ des s.e.v. strict de E . Le but de cette question est de montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $x \notin \bigcup_{i=1}^r F_i$.

Pour cela, on raisonne *par l'absurde* en supposant que $E = \bigcup_{i=1}^r F_i$.

On fixe une base $\mathcal{B}$ de E et pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, note x_λ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Montrer

qu'alors il existe un sous-espace F_{i_0} qui contient n vecteurs $x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_n}$ pour n valeurs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distinctes dans $\mathbb{R}$. Conclure à la *contradiction*

La puissance des polynômes

Exercice 7 (Déterminant de Hürwitz). a) Calculer $A_n = \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \ddots & a \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & x \end{vmatrix}$.

Echauffement ou si on n'arrive pas à faire le b)

b) Calculer $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ a & x_2 & \ddots & a \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & x_n \end{vmatrix}$. Si vous arrivez à faire ce b) directement, le a) est inutile !

c) Calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ b & x_2 & \ddots & a \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & \dots & b & x_n \end{vmatrix}$ pour $a \neq b$, en considérant $\Delta_n(X) = \begin{vmatrix} x_1 + X & a + X & \dots & a + X \\ b + X & x_2 + X & \ddots & a + X \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b + X & \dots & b + X & x_n + X \end{vmatrix}$,

et en montrant que $\Delta_n(X)$ est un polynôme de degré au plus un.

Indication – Pour simplifier, on exprimera le résultat en fonction des valeurs de la fonction polynomiale associée à $Q = (x_1 - X) \dots (x_n - X)$.

d) Retrouver le résultat du b) à partir de celui du c) par un raisonnement de passage à la limite, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.