

Déterminants 2×2 , 3×3 , 4×4

Exercice 1. Donner une expression factorisée des déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Exercice 2 (Déterminant d'une matrice TS : activité de découverte). Soit $T \in TS_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure. Déterminer $\det(T)$ pour $n = 2, 3, 4$.

Exercice 3. Calculer $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$

Exercice 4. Soit $\mathbb{K}$ un corps et $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. En calculant le déterminant $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ de deux façons différentes, obtenir une factorisation de l'expression $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ (un terme de degré 1 fois un terme de degré 2).

Question subsidiaire : Comment obtenir cette factorisation autrement ?

Exercice 5. Calculer, sous forme factorisée $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos(a) & \cos(b) \\ 1 & \cos(a) & 1 & \cos(c) \\ 1 & \cos(b) & \cos(c) & 1 \end{vmatrix}$.

La forme factorisée trouvée doit donner une C.N.S. simple d'annulation du déterminant.

Groupe symétrique :

Exercice 6. Donner, pour la permutation circulaire $\sigma = (123) \in \mathfrak{S}_3$, trois écritures distinctes de σ comme composée de deux transpositions.

Exercice 7. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 7 & 4 & 6 & 1 & 8 & 5 & 10 & 9 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer σ^{2021} .

Exercice 8. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma^{2021} = \text{id}$. La permutation σ est-elle paire ou impaire ?

Exercice 9 (Résultats utiles : conjugaison et engendrement dans $(S_n, \circ)$). a) Montrer que si $c = (a_1 \dots a_k)$ est un cycle d'ordre k dans $\mathfrak{S}_n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qcq, alors :

$$\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \dots \sigma(a_k)),$$

i.e. $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est encore un cycle d'ordre k , comme décrit ci-dessus.

b) En déduire que si $i \neq j$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on peut choisir une permutation σ telle que $(ij) = \sigma \circ (1i) \circ \sigma^{-1}$. Puis en choisissant bien cette permutation σ , que (ij) peut s'écrire comme composée de transpositions de la forme $(1k)$.

c) En déduire que toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est composée de transpositions de la forme $(1k)$ pour $k = 2, \dots, n$.

Exercice 10. Le centre d'un groupe G est l'ensemble $Z(G) = \{g \in G, \forall h \in G, gh = hg\}$. Montrer que le centre de $\mathfrak{S}_n$ est réduit à $\{\text{id}\}$, dès que $n \geq 3$.

Exercice 11. Soit $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 10 & 7 & 1 & 9 & 4 & 8 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Trouver le plus possible de $\sigma \in \mathfrak{S}_{10}$ telles que $\sigma^2 = s$.