

Chapitre H2 algèbre multilinéaire, déterminants

I Introduction : déterminants 2×2 et 3×3

1) Forme bilinéaire antisymétrique, déterminant 2×2 :

a) En dimension quelconque :

(i) **Déf.** Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. quelconque. Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire (cf. H1).

On dit que φ est *antisymétrique* si, et seulement si, $\forall (x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) =$

(ii) **Déf.** Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. quelconque. Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire.

On dit que φ est *alternée* si, et seulement si, $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) = 0$.

(iii) **Prop.** Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. (où $2.1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$). Soit $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. Alors : φ est antisymétrique si, et seulement si, φ est *alternée*.

Preuve – Sens $\Rightarrow$:

Sens $\Leftarrow$: On a φ alternée. Soit $(x, y) \in E^2$, on veut montrer que $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$.

Une idée importante, on considère :

□

(iv) **Abréviation** : On notera **F.B.A.** pour désigner une Forme Bilinéaire Alternée (ce qui entraîne toujours antisymétrique mais est plus fort si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

(v) **Prop.** L'ensemble des F.B.A. sur E , qu'on notera ici $\Lambda^2(E^*)$, est un $\mathbb{K}$ -e.v.

b) Etude en coordonnées en dimension deux (comparer au H1, § I)

Dans tout ce qui suit, E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dim. deux, et on fixe $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E .

(i) On considère φ une F.B.A. de E^2 dans $\mathbb{K}$.

Soit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$, et $y = y_1 e_1 + y_2 e_2$ deux éléments de E .

Alors par bilinéarité : $\varphi(x, y) = x_1 y_1 \varphi(e_1, e_1) + x_1 y_2 \varphi(e_1, e_2) + x_2 y_1 \varphi(e_2, e_1) + x_2 y_2 \varphi(e_2, e_2)$.

Mais comme φ est alternée $\varphi(e_1, e_1) = \varphi(e_2, e_2) =$

Comme φ est antisymétrique $\varphi(e_2, e_1) =$

On conclut que $\varphi(x, y) = (x_1 y_2 - x_2 y_1) \varphi(e_1, e_2)$.

(ii) **Déf. (connue)** Avec les notations du (i), on appelle *déterminant dans la base $\mathcal{B}$ du couple (x, y)* et on note $\det_{\mathcal{B}}(x, y)$ le nombre :

$$\det_{\mathcal{B}}(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \stackrel{\text{not.}}{=} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

(iii) **Prop. (vérif. facile)** L'application $(x, y) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x, y)$ est une F.B.A.

(iv) **Prop. (Reformulation du (i))** Pour tout $(x, y) \in E^2$, et toute F.B.A. $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$:

$$\varphi(x, y) = \det_{\mathcal{B}}(x, y) \varphi(e_1, e_2).$$

On peut réécrire ceci comme une *égalité de F.B.A* :

$$\boxed{\varphi = \varphi(e_1, e_2) \det_{\mathcal{B}}.}$$

(v) **Corollaire** : L'espace vectoriel $\Lambda^2(E^*)$ des F.B.A. est de dimension

Une F.B.A. φ est entièrement déterminée par sa valeur $\varphi(e_1, e_2)$ sur une base (e_1, e_2) de E . On notera $\varphi(\mathcal{B})$ si $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

On peut caractériser $\det_{\mathcal{B}}$ comme l'*unique* F.B.A. φ telle que $\varphi(\mathcal{B}) = 1$.

2) Forme trilinéaire alternée dans E de dim. 3 et déterminant 3×3

a) Définitions (dim. qcq.)

(i) **Déf.₁** Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. qcq. On dit qu'une application $\varphi : E^3 \rightarrow \mathbb{K}$ est une *forme trilinéaire* si, et seulement si, pour tout $(x, y, z) \in E^3$, les trois applications partielles suivantes sont *linéaires* :

- $\varphi(\square, y, z) : u \in E \mapsto \varphi(u, y, z)$,
- $\varphi(x, \square, z) : u \in E \mapsto \varphi(x, u, z)$,
- $\varphi(x, y, \square) : u \in E \mapsto \varphi(x, y, u)$.

(ii) **Déf.₂** Avec les notations du (i), on dit que φ est *antisymétrique* si, et seulement si, pour tout $(x, y, z) \in E^3$, on a les trois propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\varphi(y, x, z) &= -\varphi(x, y, z), \\ \varphi(x, z, y) &= -\varphi(x, y, z), \\ \varphi(z, y, x) &= -\varphi(x, y, z).\end{aligned}$$

(iii) **Rappel de terminologie :** Pour un ensemble à trois éléments $\{a_1, a_2, a_3\}$, les trois bijections de cet ensemble qui échangent deux éléments et qui fixent le troisième sont appelées des *transpositions*.

On peut donc traduire le (ii) en disant de manière un peu vague ici, mais nous y reviendrons plus loin, que toute *transposition* de l'ensemble des trois entrées échange le signe de $\varphi(x, y, z)$.

(iv) **Prop. (invariance par permutation circulaire) :** Si φ est une forme trilinéaire antisymétrique, alors pour tout $(x, y, z) \in E^3$, on a :

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(y, z, x) = \varphi(z, x, y).$$

Preuve : Faire deux transpositions !

(v) **Déf.₃** On dit qu'une forme trilinéaire $\varphi : E^3 \rightarrow \mathbb{K}$ est *alternée* si, et seulement si, pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $\varphi(x, x, z) = 0$, $\varphi(x, y, x) = 0$, $\varphi(x, y, y) = 0$.

Autrement dit φ est alternée ssi $\varphi(x, y, z) = 0$ dès que deux des entrées sont égales.

(vi) **Prop. –** Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. (avec toujours le N.B sur $2.1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$). Soit $\varphi : E^3 \rightarrow \mathbb{K}$ une forme trilinéaire. Alors : φ est alternée si, et seulement si φ est antisymétrique.

Preuve : La même que pour les formes bilinéaires. □

On abrégera en **F.T.A.** pour forme trilinéaire alternée :

(vii) On notera $\Lambda^3(E^*)$ l'e.v. des F.T.A. sur E .

b) Image d'une famille (u, v, w) liée.

(i) **Prop.** Si φ est une F.T.A. sur un e.v. E et $(u, v, w) \in E^3$ est une famille liée, alors $\varphi(u, v, w) =$

(ii) *Preuve :* S.R.d.G. on peut supposer que $w = \lambda u + \mu v$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Alors $\varphi(u, v, w) =$

(iii) **Cor.** Une F.T.A sur un e.v. E de dim. 2 est toujours

N.B. : Désormais, on suppose que E est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dim. 3

c) Expression d'une F.T.A. qcq dans une base en dim. 3 :

On considère donc E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dim. trois et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

On considère trois vecteurs $(u, v, w) \in E^3$ et on note $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ et $v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$, et $w = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3$.

(i) Si on développe $\varphi(u, v, w)$ par linéarité par rapport à la première entrée :

$$\varphi(u, v, w) = \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, v, w) = x_1 \varphi(e_1, v, w) + x_2 \varphi(e_2, v, w) + x_3 \varphi(e_3, v, w).$$

(ii) Pour chacun des trois termes trouvés, on le développe par linéarité p.r. à la seconde entrée :

- $\varphi(e_1, v, w) = \varphi(e_1, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3, w)$
 $= y_1 \varphi(e_1, e_1, w) + y_2 \varphi(e_1, e_2, w) + y_3 \varphi(e_1, e_3, w)$
 $= y_2 \varphi(e_1, e_2, w) + y_3 \varphi(e_1, e_3, w)$ par caractère alterné.
- $\varphi(e_2, v, w) = \varphi(e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3, w)$
 $= y_1 \varphi(e_2, e_1, w) + y_3 \varphi(e_2, e_3, w).$
- $\varphi(e_3, v, w) = \varphi(e_3, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3, w)$
 $= y_1 \varphi(e_3, e_1, w) + y_2 \varphi(e_3, e_2, w).$

(iii) Ainsi avec les trois expressions du (ii) dans celle du (i), on obtient six termes :

$$\begin{aligned} \varphi(u, v, w) &= x_1 y_2 \varphi(e_1, e_2, w) + x_1 y_3 \varphi(e_1, e_3, w) \\ &+ x_2 y_1 \varphi(e_2, e_1, w) + x_2 y_3 \varphi(e_2, e_3, w) \\ &+ x_3 y_1 \varphi(e_3, e_1, w) + x_3 y_2 \varphi(e_3, e_2, w). \end{aligned}$$

(iv) Dans chacun des six termes du (iii), on va utiliser l'écriture de w dans la base $\mathcal{B}$. Mais là le caractère alterné va simplifier les choses :

En effet, en détaillant le calcul pour le premier terme, puis en utilisant l'effet des transpositions et permutations circulaires, chaque terme va s'exprimer en fonction de $\varphi(e_1, e_2, e_3)$, précisément :

- $\varphi(e_1, e_2, w) = \varphi(e_1, e_2, z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3)$
 $= z_1 \varphi(e_1, e_2, e_1) + z_2 \varphi(e_1, e_2, e_2) + z_3 \varphi(e_1, e_2, e_3).$
 $= z_3 \varphi(e_1, e_2, e_3)$ par caractère alterné.
- $\varphi(e_1, e_3, w) = z_2 \varphi(e_1, e_3, e_2) = -z_2 \varphi(e_1, e_2, e_3).$
- $\varphi(e_2, e_1, w) =$
- $\varphi(e_2, e_3, w) =$
- $\varphi(e_3, e_1, w) =$
- $\varphi(e_3, e_2, w) =$

(v) On obtient donc finalement l'expression en coordonnées cherchée :

$$\varphi(u, v, w) = (x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1) \varphi(e_1, e_2, e_3).$$

d) Définition et premier calcul du déterminant dans une base :

On considère toujours que E est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dim. 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

(i) **Déf. :** A partir de l'expression obtenue en c) (v), on déduit qu'il existe une F.T.A. φ sur E telle que $\varphi(e_1, e_2, e_3) = 1$. Par déf. φ s'appelle *déterminant dans la base $\mathcal{B}$* et on note $\varphi = \det_{\mathcal{B}}$.

(ii) En coordonnées, on a : $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1$. Pour l'instant, ce n'est pas très parlant, mais on va voir comment retenir cette formule.

(iii) Avec la déf. précédente, le résultat du c) (v) devient donc, en notant $\Lambda^3(E^*)$ l'e.v. des F.T.A. sur E :

Prop. : $\forall \varphi \in \Lambda^3(E^*), \forall (u, v, w) \in E^3, \varphi(u, v, w) = \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) \cdot \varphi(\mathcal{B})$,
 où on a noté $\varphi(\mathcal{B}) = \varphi(e_1, e_2, e_3)$.
 On peut encore écrire ceci comme égalité de F.T.A. :

$$\forall \varphi \in \Lambda^3(E^*), \varphi = \varphi(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}.$$

(iv) Notation : en gardant les notations précédentes, on note aussi :

$$\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Comment on retient la formule donnant le déterminant en coordonnées donnée au (ii) : *retenir* $+, -, +$ dans la première colonne et à chaque terme on cache la ligne et la colonne...

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

e) Formules de calcul des déterminants 3×3

(i) Développement par rapport à n'importe quelle colonne (choix de celle qui a des zéros).

(ii) Calcul explicite avec six produits : "règle de Sarrus", pour exemples numériques.

Cf. paragraphe suivant : les six termes correspondent aux six permutations de $\{1, 2, 3\}$ et règles des signes.

(iii) Déterminant d'une matrice A : $\det_{\mathcal{B}}(C_1, C_2, C_3)$ où $\mathcal{B}$ base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{K})$.

Avec la forme du dév. dans Sarrus : égalité $\det(A) = \det({}^tA)$.

(iv) Conséquence : $\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(L_1, L_2, L_3)$, caractère trilineaire alterné par rapport aux lignes : toutes les opérations de type pivot sur les lignes. Développement par rapport à une ligne.

(v) Calcul du déterminant par opérations de type pivot de Gauss sur ligne et/ou colonnes :

Le caractère trilineaire alterné dit que :

- $\det(C_1, C_2, C_3)$ ne change pas via $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ pour $j \neq i$. De même avec les lignes.
- L'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$ multiplie le déterminant par λ
- L'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ avec $i \neq j$ change le signe du déterminant.

Intérêt du pivot de Gauss : obtenir une expression factorisée et avoir la CNS d'annulation du déterminant.

(vi) Exemples : Vandermonde et $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ (Comparaison Sarrus /pivot)

A chaque étape, regarder si factorisations possibles dans *chaque* ligne ou colonne.

f) Exemple introductif aux déterminants 4×4

Toutes les propriétés précédentes se généralisent. Même règle des signes pour le développement. Mêmes possibilités d'opérations de type pivot. MAIS Pas de Sarrus!!!

Exemple : expression factorisée de $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$

II Le groupe symétrique :

1) Définitions et premières propriétés :

a) (i) **Rappels** : si $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ est un ensemble à n éléments (ce qui signifie que les a_i sont tous *distincts*), et qu'on note $\text{Bij}(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E , on sait que :

- $\text{Bij}(E)$ a exactement $n!$ éléments, appelées *permutations* de E , cf. chap. J1.
- $(\text{Bij}(E), \circ)$ est un groupe (non commutatif dès que $n \geq 3$), cf. chap.

(ii) **Définition du groupe symétrique :**

Déf. Si $E = \llbracket 1, n \rrbracket = \{1, 2, \dots, n\}$: le groupe $(\text{Bij}(E), \circ)$ est noté $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ ou $(S_n, \circ)$ et s'appelle le *(n-ième) groupe symétrique*.

Scholie : Du point de vue de la théorie des groupes, on "identifie" deux groupes isomorphes. Il se trouve que si on change d'ensemble E à n éléments, on obtient un groupe isomorphe, donc $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ pourra aussi désigner $\text{Bij}(E)$ pour un autre choix de E à n éléments.

b) **Illustrations pour de petites valeurs de n (rappels) :**

- (i) Cas $n = 2$, $\mathfrak{S}_2 = \{\text{id}, \tau\}$ où $\tau : \begin{cases} 1 \rightarrow 2, \\ 2 \rightarrow 1. \end{cases}$.

Pour ce qui est de sa structure de groupe, on a la table d'opération

$\circ$	id	τ
id		
τ		

Comme groupe, $(\mathfrak{S}_2, \circ)$ est isomorphe à _____ ou encore à _____

Mieux encore, exercice : tous les

- (ii) Cas $n = 3$, $\mathfrak{S}_3 = \{\text{id}, \tau_{1,2}, \tau_{1,3}, \tau_{2,3}, \sigma_1, \sigma_2\}$.

Où $\sigma_1 : \begin{cases} 1 \rightarrow 2, \\ 2 \rightarrow 3, \\ 3 \rightarrow 1. \end{cases}$, $\sigma_2 : \begin{cases} 1 \rightarrow 3, \\ 3 \rightarrow 2, \\ 2 \rightarrow 1. \end{cases}$ sont appelées

et $\tau_{1,2} : \begin{cases} 1 \rightarrow 2, \\ 2 \rightarrow 1, \\ 3 \rightarrow 3. \end{cases}$ et ses deux soeurs sont appelées

- (iii) Calculs dans $(\mathfrak{S}_3, \circ)$:

• On calcule $\sigma_1^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_1 \circ \sigma_1 =$ _____ puis $\sigma_1^3 =$ _____
Une fois qu'on sait que $\sigma_1^3 = \text{id}$, la suite des puissances σ_1^k est claire.

• On calcule par exemple $\tau_{1,2} \circ \tau_{1,3} =$ _____
On calcule d'autre part $\tau_{1,3} \circ \tau_{1,2} =$ _____
On conclut que le groupe $(\mathfrak{S}_3, \circ)$ n'est pas :

Exercice (*) : C'est en quelque sorte le plus petit groupe non _____ on peut démontrer que tous les groupes de cardinal plus petit ou égal à cinq sont commutatifs. Pour cela il faut déjà savoir démontrer que si H est un sous-groupe de G alors $\text{Card}(H)$ divise $\text{Card}(G)$ (théorème de Lagrange).

- (iv) Notation possible pour les permutations : tableau à deux lignes $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Par exple $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\tau_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) Permutations particulières, orbites, cycles.

- (i) Déf. $\text{Orb}(x) = \{\sigma^k(x), k \in \mathbb{N}\}$.

- (ii) Exemple des orbites de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 7 & 9 & 3 & 2 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$. Dessins circulaires.

- (iii) Prop. Il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^k(x) = x$. Si on prend $p = \min\{k \in \mathbb{N}^*, \sigma^k(x) = x\}$ alors $\text{Orb}(x)$ est de cardinal p et est égale à $\{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)\}$.

Preuve – Comme l'orbite est un ensemble fini, il existe deux entiers $i < j$ tels que $\sigma^i(x) = \sigma^j(x)$ et $k = j - i$ convient. En outre, avec la déf. de p , on déduit de même qu'il n'existe pas de couple (i, j) avec $i < j$ dans $[0, p-1]$ tels que $\sigma^i(x) = \sigma^j(x)$ ce qui donne la deuxième partie de l'énoncé. $\square$

- (iv) Conséquence : l'application $k \mapsto \sigma^k(x)$ est p -périodique.

On a aussi : $\text{Orb}(x) = \{\sigma^k(x), k \in \mathbb{Z}\}$.

- (v) Conséquence : $y \in \text{Orb}(x) \Leftrightarrow x \in \text{Orb}(y)$ et dans ce cas $\text{Orb}(x) = \text{Orb}(y)$.

Ainsi ou bien $\text{Orb}(x) = \text{Orb}(y)$ ou bien $\text{Orb}(x) \cap \text{Orb}(y) = \emptyset$.

- (vi) Déf. : σ permutation circulaire ssi σ possède une seule orbite.

- (vi) Déf. cycle d'ordre k . Cas particulier : les transpositions.

Support d'un cycle.

Notation condensée pour les cycles. Dans $\mathfrak{S}_7$, on note (1342) pour $\begin{pmatrix} 1234567 \\ 3142567 \end{pmatrix}$.

2) Décomposition d'une permutation en permutations plus simples :

a) Décomposition en produit de cycles à supports disjoints :

- (i) Etude sur un exemple.

- (ii) L'essentiel : Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qcq, sur chacune de ses orbites Ω_i , $\sigma|_{\Omega_i}$ est une permutation circulaire.

- (iii) Prop. générale. Décomposition unique à l'ordre près, commutative.

b) Décomposition en transpositions :

- (i) Exemple des produits $(13)(12) \neq (12)(13)$ donnent deux cycles d'ordre 3.
- (ii) Prop. (dém.) Tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme une composée (d'au plus $n-1$) transpositions. Il n'y a pas unicité : contre-exemple dans $\mathfrak{S}_3$.

Exercice : on peut décomposer en (un nbre éven. plus grand) de transpositions seulement du type $(1i)$.

3) Signature d'une permutation :

a) Autour de la définition de la signature :

(i) **Motivation** : si σ est une permutation, qu'on décompose en transpositions :

$$\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r \quad (*)$$

alors on voudrait définir sa signature, noté $\varepsilon(\sigma)$ par : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^r$.

On dira alors qu'une permutation σ est *paire* si $\varepsilon(\sigma) = 1$ i.e. si σ est composée d'un nombre *pair* de transpositions et que σ est *impaire* sinon.

Dans l'étude déjà vue pour $n = 3, 4$ des formes tri, quadrilinéaires alternées φ , ce nombre nous renseignera sur l'effet de cette permutation sur la forme φ .

(ii) **Problème de la définition du (i)** : la décomposition d'une permutation en transpositions n'est *pas unique*. Par exemple si on compose dans $(*)$ par $\text{id} = \tau \circ \tau$ où τ est une transposition quelconque, on remplace r par $r + 2$.

Pour montrer que la définition du (ii) est légitime, on doit donc montrer que le nombre r de transpositions dans une décomposition $(*)$ a toujours la même parité

(iii) **Vers la solution de ce problème** : on exhibe un *variant*, attaché à chaque permutation σ , qui évolue de 1 modulo 2 quand on compose σ par une *transposition*.

Lemme clef (dém. non exigible). Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $o(\sigma)$ pour le nombre d'orbites de σ . Alors pour toute transposition $\tau \in \mathfrak{S}_n$:

$$o(\sigma \circ \tau) = o(\sigma) \pm 1 \equiv o(\sigma) + 1 \pmod{2}$$

Idee alors : on va utiliser $(-1)^{o(\sigma)}$ pour aller vers la définition de la signature, mais comme on veut que, pour une transposition τ , $\varepsilon(\tau) = -1$ et que $o(\tau) = n - 1$, on pose la :

(iv) **Définition** : Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pose : $\boxed{\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-o(\sigma)}}$.

(v) **La définition du (i) devient une propriété** :

Prop. $\boxed{\text{si } \sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r \text{ alors } \varepsilon(\sigma) = (-1)^r}$.

De manière immédiate, en décomposant deux permutations σ et σ' en transpositions, on obtient aussi le théorème du b) ci-dessous :

b) Multiplicativité :

$\boxed{\text{Prop : } \varepsilon \text{ est un morphisme de groupes de } (\mathfrak{S}_n, \circ) \text{ dans } (\{-1, 1\}, \times)}$.

Rem (exercice plus difficile) : on peut montrer que ε est *le seul* morphisme de groupe non trivial de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$.

c) Groupe alterné : $\mathfrak{A}_n$.

- (i) Déf. $\mathfrak{A}_n = \ker \varepsilon$, sous-groupe de permutations paires.
- (ii) Si $I_n = \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n$: bijection entre I_n et $\mathfrak{A}_n$. Cor. : $\text{Card}(\mathfrak{A}_n) = \frac{n!}{2}$.

III Formes n-linéaires alternées (d'un espace E de dim. n), déterminant de n vecteurs :

1) Formes k -linéaires alternées pour k qcq :

a) Définitions

Si E est un $\mathbb{K}$ -ev, déf. forme k -linéaire : $E^k \rightarrow \mathbb{K}$, forme alternée, forme antisymétrique.

Abus de notation : φ antisymétrique ssi " $\varphi \circ \tau_{i,j} = -\varphi$ ssi $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k, \varphi \circ \sigma = \varepsilon(\sigma)\varphi$."

Si dans $\mathbb{K}$, on a $2 \neq 0$, alternée équivaut à antisymétrique (sinon : alterné entraîne toujours antisymétrique).

Dans toute la suite on notera *F.n.L.A.* pour dire *Forme n Linéaire Alternée*, sous cette condition de dire alternée, la théorie s'applique même si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce qui peut être utile pour des arguments de parité.

b) Prop. immédiates

- (i) Si φ est k -linéaire et l'un des $v_i = 0_E$, alors $\varphi(v_1, \dots, v_k) = 0$.
- (ii) Si φ FkLA alors $\varphi(v_1, \dots, v_k)$ invariant par $v_i \leftarrow v_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j$.
- (iii) Si $v_1, \dots, v_k$ liée alors $\varphi(v_1, \dots, v_k) = 0$. Donc si $k > \dim E$ pas de FkLA non nulle.

Dans toute la suite, on ne s'intéresse qu'aux formes n -lin. alternées où $n = \dim E$.

2) Expression d'une FnLA dans une base de E

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $v_j = \sum_{i=1}^n x_{i,j} e_i$, obtention de l'écriture :

$$\varphi(v_1, \dots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n} \right) \varphi(e_1, \dots, e_n).$$

Cor. une FnLA φ est entièrement déterminée par la donnée de $\varphi(e_1, \dots, e_n)$.

3) Le déterminant et l'espace vectoriel $\Lambda^n(E^*)$ des FnLA :

a) Prop. : Réciproque du 2) : l'application $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n}$ est bien une FnLA. et vaut 1 sur $(e_1, \dots, e_n)$.

b) Prop.-déf. L'application du a) est l'unique FnLA φ telle que $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$. Elle s'appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$ et se note : $\det_{\mathcal{B}}$.

c) (i) En notant $\Lambda^n(E^*)$ l'e.v. des FnLA sur E , la formule du 2) entraîne alors :

$$\forall \varphi \in \Lambda^n(E^*), \varphi = \varphi(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}} = \varphi(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$$

(ii) En particulier, pour $\varphi = \det_{\mathcal{B}'}$, où $\mathcal{B}'$ est une autre base, on a la **formule de changement de base** :

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}.$$

(iii) Le (i) dit aussi que, pour E de dim. n , $\Lambda^n(E^*)$ est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dim 1.

d) Conséquence du c) (ii) :

Prop. Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dim. n et $\mathcal{B}$ une base de E . Une famille de n vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ de E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dim. n est libre si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

IV Calculs de déterminants $n \times n$

1) Notion de déterminant d'une matrice : déterminant des colonnes

a) Déf. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose $\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

b) Attention aux prop. algébriques : si $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, et pas de formule pour $\det(A+B)$.

L'application $\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ n'est pas linéaire !

c) Déterminant de matrices particulières :

• Si A est diagonale de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors $\det(A) =$

• Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, ses colonnes sont libres, donc : $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

d) Avec l'expression combinatoire $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ (†).

Prop. (dém.) $\det({}^t A) = \det(A)$. Appl. prop. opérations sur les lignes.

2) Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne

a) Un premier calcul fondamental :

(i) si dans la première colonne seul $a_{1,1} \neq 0$: avec formule (†).

(ii) Conséq. dét. des matrices triangulaires (et en part. diagonales, scalaires...)

b) Quelques définitions :

Mineur $\Delta_{i,j}$: déterminant obtenu en enlevant L_i et C_j . *Cofacteur* $\widehat{a_{i,j}} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.

Comatrice de A : matrice des cofacteurs. Notation $Com(A)$ ou $\widehat{A}$. Exple si $A \in M_2(\mathbb{K})$.

c) Développement par rapport à une colonne :

(i) Développement par rapport à la première colonne.

(ii) Développement par rapport à une colonne j qcq. Formule : $\sum_{k=1}^n a_{k,j} \widehat{a_{k,j}}$. (Dém. non exigée)

d) Développement par rapport à une ligne : Même formule attention aux variables muettes/ et non muettes.

Intérêt pratique : choix de la LI ou CO avec le plus de zéros.

d) Exercice : exemple du déterminant tridiagonal

(i) Obtention de la relation de réc. $\Delta_n = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2}$

(ii) Si les diagonales ne sont pas constantes, même méthode.

3) L'exemple du déterminant de Vandermonde :

a) $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ **attention à l'ordre !.**

b) Preuve par opération sur les lignes et les colonnes : attention à l'ordre des opérations.

c) Preuve où les polynômes font la factorisation pour nous.

4) Déterminants se ramenant à un Vandermonde :

a) Exple : Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_2 x_3 \dots x_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_1 x_2 \dots x_{n-1} \end{vmatrix}$.

b) Avec des C.L. Si $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ est une famille de polynômes unitaires avec $\deg(P_i) = i$ et $A = (P_i(a_j))_{(i,j) \in [0, n-1] \times [1, n]}$ alors $\det(A) = V(a_1, \dots, a_n)$.

V Déterminant d'un endomorphisme :

1) Le problème de la définition du déterminant d'un endomorphisme :

a) **Idee :** Si $f \in \mathcal{L}(E)$ on voudrait définir, $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ i.e. $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ où $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

Quel est le problème que pose cette définition ? Quand a-t-on déjà rencontré ce problème ?

b) Comment on va résoudre ce problème ici :

(i) Idee : « composer $\det$ et f » i.e pour notre base $\mathcal{B}$ fixée considérer l'application :

$$\varphi : (u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)).$$

Par construction φ est une FnLA et la formule du III 3) c) donne alors que :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \varphi(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

Mais $\varphi(e_1, \dots, e_n) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ par définition du déterminant de la matrice. D'où la formule importante :

$$\boxed{\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n).}$$

Scholie : Cette formule dit que $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ est ce qui « sort » du déterminant, quand on veut « sortir f » de $\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n))$.

(ii) Application du (i) à l'indépendance par rapport aux choix des bases :

Si $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une autre base de E , alors pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) &= \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \det_{\mathcal{C}}(f(u_1), \dots, f(u_n)), \text{ par la formule de chgt. de base du III 3),} \\ &= \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \det(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)) \det_{\mathcal{C}}(u_1, \dots, u_n) \quad \text{formule du (i) avec la base } \mathcal{C}, \\ &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n), \quad \text{par la formule de chgt. de base du III 3).} \end{aligned}$$

(iii) En comparant les deux formules à la fin du (i) et du (ii), on obtient enfin :

$$\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)).$$

On a prouvé le :

Théorème définition du déterminant d'un endomorphisme : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dim n . Alors :

(C1) Le nombre $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ est *indépendant du choix de la base $\mathcal{B}$ choisie*. Comme il ne dépend que de f , on l'appelle $\det(f)$ (sans référence à une base).

(C2) On a l'importante formule suivante : dans toute base $\mathcal{B}$:

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

d) **Scholie :** *Lien avec l'idée de volume.* En gardant à l'idée, que, au moins dans le cadre euclidien, on définit le volume orienté comme le déterminant en b.o.n.d., la formule de la (C2), signifie que : *le déterminant d'un endomorphisme dit comment celui-ci dilate ou rétrécit les volumes des parallélépipèdes.*

2) Applications : propriétés pour la composition :

a) (i) Prop. $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g) = \det(g \circ f).$

Preuve : On choisit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et on applique la formule du théorème-déf. du déterminant d'un endomorphisme à $(u_1, \dots, u_n) = (g(e_1), \dots, g(e_n))$, ce qui donne :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(g(e_1)), \dots, f(g(e_n))) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(g(e_1), \dots, g(e_n)).$$

Par déf. du déterminant d'un endomorphisme, on a alors : $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g).$ $\square$

(ii) Corollaire : $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2, \det(A \times B) = \det(A) \det(B).$

(iii) Remarque 1 : on retrouve immédiatement la caract. $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$

Remarque 2 : essayez de montrer ce résultat « directement » avec la formule du produit de matrice et celle du déterminant !!

b) (i) Corollaire : $\det : (GL(E), \circ) \rightarrow (\mathbb{K}^*, \times)$ (resp. de $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ dans $(\mathbb{K}^*, \times)$) est un *morphisme de groupes*.

(ii) En particulier $\forall A \in GL_n(\mathbb{K}), \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$

c) **Le groupe spécial linéaire $(SL(E), \circ)$:**

(i) **Déf.** $SL(E) = \{f \in \mathcal{L}(E), \det(f) = 1\}, SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}), \det(A) = 1\}.$

(ii) **Prop.** $SL(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ).$

De même $SL_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{K}), \times).$

(iii) **Interprétation géométrique :** D'après le théorème-déf. du déterminant d'un endomorphisme, les endomorphismes dans $SL(E)$ sont exactement ceux qui préservent les *volumes orientés*.

3) Synthèses et complément sur le déterminant d'une matrice :

a) **Trois façons de voir le déterminant d'une matrice**

(i) $\det(A)$ = déterminant des vecteurs colonnes,

(ii) expression combinatoire $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ (*).

(iii) mais aussi par l'action géométrique de A : $\det A = \det(u)$ si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u),$

b) **Exemple d'utilisation des différents point de vue :**

Avec a) (i) : pivots.

Avec a) (ii) formule $\det(A) = \det({}^t A).$

Avec a) (iii) la formule : $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ ou encore deux matrices *semblables* ont même déterminant.

VI Application des déterminants

1) Inverse de matrice

a) Cas des matrices 2×2 , la formule connue : $A^{-1} = \frac{{}^t\widehat{A}}{\det(A)}$ (à retenir plus concrètement).

b) Généralisation en dim. qcq. :

Prop. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $\det A \neq 0$, la formule du a) donne encore A^{-1} .

Mieux, pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, ${}^t\widehat{A}A = A {}^t\widehat{A} = (\det A)I_n$.

c) Rappel : si $n \geq 3$ intérêt plus théorique que pratique de ces formules (la bonne méthode pour calculer l'inverse, c'est le pivot).

Exemple d'exercice d'application : $A \in M_n(\mathbb{Z})$ admet un inverse dans $M_n(\mathbb{Z})$ ssi $\det(A) = \pm 1$.

d) Exercice important : rang de $\text{Com}(A)$ en fonction de $\text{rg}(A)$.

2) Systèmes de Cramer

a) Définition et caractérisation par le déterminant

(i) Un système de n éq. à n inconnues : $AX = Y$ est de Cramer ssi unique sol ssi $\det(A) \neq 0$.

(ii) Utile cas SSM $Y = 0$: $AX = 0$ admet une sol. non nulle ssi $\det A = 0$.

b) Formules de Cramer :

Prop. Pour $A = [C_1 \dots C_n]$ on note $A_i = [C_1 \dots Y \dots C_n]$ avec Y en i -ème colonne.

Alors $x_i = \det(A_i) / \det(A)$.

Pv 1 : avec la formule de la comatrice.

Pv. 2 : idée traduction du système en équation sur les vecteurs colonnes $C_1x_1 + \dots + C_nx_n = Y$.

3) Valeurs propres et polynôme caractéristique (introduction..)

a) Définitions : vecteurs propres, valeurs propre

b) Intérêt pour la diagonalisation

c) Méthode de recherche des valeurs propres : λ est valeur propre de f ssi $\ker(f - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$ ssi $\det(f - \lambda \text{id}) = 0$.

d) Le héros : le polynôme caractéristique $\chi_f(\lambda) = \det(\lambda \text{id} - f)$.

On note aussi $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

Prop. χ_f est un polynôme unitaire de degré n .

Démonstration importante

4) En géométrie euclidienne : les déterminants de Gram cf. H3

a) Idée essentielle pour Gram :

si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_r) \in M_{n,r}(\mathbb{R})$ avec $\mathcal{B}$ b.o.n., alors $\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$, $(v_i | v_j) = ({}^tA.A)_{i,j}$.

b) Déf. matrice de Gram $G = ((v_i | v_j)) \in M_r(\mathbb{R})$, le déterminant de Gram est nul ssi $(v_1, \dots, v_r)$ liée, et strictement positif sinon. On verra au H3 que ce déterminant représente le volume r -dimensionnel du parallélépipède engendré par $(v_1, \dots, v_r)$.

Appendice : deux méthodes de calcul du déterminant de Vandermonde

a) Par opération sur les lignes et colonnes :

$$\text{Dans } V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Si on commence par faire $L_n \leftarrow L_n - a_n L_{n-1}$, on obtient comme nouvelle ligne L_n :

$$((a_1 - a_n)a_1^{n-2} \quad (a_2 - a_n)a_2^{n-2} \quad \dots \quad (a_{n-1} - a_n)a_{n-1}^{n-2} \quad 0).$$

De même ensuite on fait $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - a_n L_{n-2}$ etc jusqu'à $L_2 \leftarrow L_2 - a_n L_1$ dans cet ordre donne :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 - a_n & a_2 - a_n & \dots & a_{n-1} - a_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (a_1 - a_n)a_1^{n-2} & (a_2 - a_n)a_2^{n-2} & \dots & (a_{n-1} - a_n)a_{n-1}^{n-2} & 0 \end{vmatrix}.$$

Si on développe par rapport à la dernière colonne, on obtient un déterminant $(n-1) \times (n-1)$ dans lequel on peut factoriser dans chaque colonne de sorte que :

$$V(a_1, \dots, a_n) = (-1)^{n+1} (a_1 - a_n) \dots (a_{n-1} - a_n) V(a_1, \dots, a_{n-1}).$$

En rétablissant les signes, on obtient bien $V(a_1, \dots, a_n) = (a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1}) V(a_1, \dots, a_{n-1})$ (*).

b) Par la méthode du polynôme : Si deux des a_i sont égaux alors $V(a_1, \dots, a_n) = 0$, on suppose donc $a_1, \dots, a_n$ deux à deux distincts. On remplace a_n par une indéterminée X i.e. on considère $P(X) = V(a_1, \dots, a_{n-1}, X)$.

Le développement de ce déterminant par rapport à la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \end{pmatrix}$ montre que P est un

polynôme de degré au plus $n-1$ et dont le coefficient pour X^{n-1} est $V(a_1, \dots, a_{n-1})$.

En outre P s'annule en $a_1, \dots, a_{n-1}$ donc $P(X) = V(a_1, \dots, a_{n-1})(X - a_1) \dots (X - a_{n-1})$. Donc $V(a_1, \dots, a_n) = P(a_n)$ vérifie bien la relation (*). $\square$