

Concours blanc

Corrigé

PREMIER PROBLÈME

Partie A

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue et positive. On note, pour tout entier naturel n : $u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbf{N}$.

Soit $t \in [0, 1]$, on a donc $t^n \geq 0$ et on peut donc multiplier l'inégalité $t \leq 1$ par t^n , on obtient $t^{n+1} \leq t^n$, puis, par positivité de f : $t^{n+1} f(t) \leq t^n f(t)$.

Ceci étant vrai pour tout $t \in [0, 1]$, on a donc $\forall t \in [0, 1]$, $t^{n+1} f(t) \leq t^n f(t)$, puis, par croissance de l'intégrale : $\int_0^1 t^{n+1} f(t) dt \leq \int_0^1 t^n f(t) dt$ i. e. $u_{n+1} \leq u_n$.

Ceci étant vrai pour tout entier n , la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante.

2. Montrer qu'on a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \max_{t \in [0,1]} f(t)$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.

• Justifions déjà que l'expression $\max_{t \in [0,1]} f(t)$ a un sens ! La fonction f est continue sur $[0, 1]$ qui est un segment, donc d'après le théorème des bornes atteintes elle est bornée et atteint ses bornes, en particulier $\max_{t \in [0,1]} f(t)$ existe.

• Soit $n \in \mathbf{N}$. Le réel $\max_{t \in [0,1]} f(t)$ majore f et f est positive, donc on a $\forall t \in [0, 1]$, $0 \leq f(t) \leq \max_{t \in [0,1]} f(t)$. Comme on peut multiplier une inégalité par un réel positif, on déduit : $\forall t \in [0, 1]$, $t^n f(t) \leq t^n \max_{t \in [0,1]} f(t)$

puis, par croissance de l'intégrale : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\int_0^1 0 dt \leq \int_0^1 t^n f(t) dt \leq \int_0^1 t^n \left(\max_{t \in [0,1]} f(t) \right) dt$.

Et enfin, par linéarité de l'intégrale : $0 \leq u_n \leq \max_{t \in [0,1]} f(t) \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \max_{t \in [0,1]} f(t)$.

• Évidemment on a $0 \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0$. Comme $\max_{t \in [0,1]} f(t)$ ne dépend que de f , on a aussi $\frac{1}{n+1} \max_{t \in [0,1]} f(t) \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0$. Finalement d'après le théorème de convergence par encadrement (TdG), on conclut $u_n \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0$.

Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

3. Établir que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.

• Soit $n \in \mathbf{N}$. D'après la relation de Chasles, on a $S_{2(n+1)} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1}$ i. e. $S_{2(n+1)} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1}$ qui est négatif puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante. Ceci étant vrai pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, la suite $(S_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante.

• Soit $n \in \mathbf{N}$. D'après la relation de Chasles, on a $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+3} u_{2n+3} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2}$ i. e. $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3}$ qui est positif puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante. Ceci étant vrai pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, la suite $(S_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante.

• Soit $n \in \mathbf{N}$. D'après la relation de Chasles, on a $S_{2n} - S_{2n+1} = -(-1)^{2n+1} u_{2n+1} = u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'après le théorème fondamental sur les sous-suite et la question 2.iii/.

• Finalement on a montré que $(S_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante, $(S_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante, et $S_{2n} - S_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ainsi les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ sont adjacentes et convergent donc vers une même limite.

D'après le théorème pair/impair, $(S_n)_n$ converge elle-même vers cette limite.

On note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

4. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $S_n = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} f(t) dt$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^k f(t) dt && \text{par définition} \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k t^k f(t) \right) dt && \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-t)^k f(t) \right) dt && \text{par propriété des puissances} \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-t)^k \right) f(t) dt && \text{par linéarité de la somme} \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 - (-t)} f(t) dt && \text{d'après l'identité géométrique, car pour } t \in [0, 1] \text{ on a } -t \neq 1 \end{aligned}$$

C'est bien le résultat demandé.

5. Justifier qu'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} f(t) dt = 0$. En déduire qu'on a $\ell = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt$.

• La fonction $\tilde{f} = t \mapsto \left| \frac{t}{1+t} f(t) \right|$ est continue sur $[0, 1]$ par théorèmes généraux, et positive par définition, donc en appliquant la question 2 à $\tilde{f}$ plutôt qu'à f , on obtient $\int_0^1 \left| \frac{t^{n+1}}{1+t} f(t) \right| dt = \int_0^1 t^n \tilde{f}(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par inégalité triangulaire sur les intégrales : $0 \leq \left| \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} f(t) dt \right| \leq \int_0^1 t^n \tilde{f}(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc par TdG on a bien $\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

• On a $S_n = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} f(t) dt$ donc $S_n - \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ comme produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle (TdG). Ainsi a-t-on $S_n \rightarrow \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt$, autrement dit $\ell = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt$ par unicité de la limite.

6. (a) Dans cette question seulement, on choisit $f(t) = 1$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$.

On se place dans le cas particulier $f : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbf{R} \\ t & \mapsto 1 \end{cases}$; on a bien $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ et donc on a : $\sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^k f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt$. Or : $\sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^k f(t) dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^k dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$. Et : $\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$. Conclusion : $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)$.

(b) Dans cette question seulement, on choisit $f(t) = \sqrt{t}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

On se place dans le cas particulier $f : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbf{R} \\ t & \mapsto \sqrt{t} \end{cases}$; on a bien $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ (et pas mieux : f n'est pas dérivable en 0) donc $\sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^k f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt$.

$$\text{Or : } \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^k f(t) dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{k+\frac{1}{2}} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+\frac{3}{2}} = 2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+3}.$$

$$\text{Et : } \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt. \text{ Effectuons le changement de variables } x = \sqrt{t} \Leftrightarrow t = x^2.$$

On a $dt = 2x dx$, $0 \xrightarrow{t} 1 \Leftrightarrow 0 \xrightarrow{x} 1$, et l'application $x \mapsto t = x^2$ est bien $\mathcal{C}^1$ et bijective de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

$$\text{Ainsi a-t-on } \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} 2x dx = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = 2 \left[x - \arctan(x) \right]_0^1 = 2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Conclusion : } 2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right), \text{ ou encore } \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\pi}{4}, \text{ et donc par changement}$$

$$\text{d'indice : } \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\pi}{4}. \text{ Enfin, effectuons un changement d'indice sur la somme proposée : on}$$

$$\text{a } \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+3} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ par propriétés algébriques sur les limites (PAL).}$$

Partie B

On conserve les notations de la **partie A**, en supposant en plus l'application f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$, et on pose, pour tout réel $t \in [0, 1]$, $g(t) = \frac{f(t)}{1+t}$.

7. Montrer qu'on a, pour tout entier naturel n :

$$\int_0^1 t^{n+1} g(t) dt = \frac{f(1)}{2(n+2)} + \frac{f(1) - 2f'(1)}{4(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \int_0^1 t^{n+3} g''(t) dt.$$

Par théorèmes généraux on a $g \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbf{R})$ et donc $g, g' \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$. De plus, pour tout $t \in [0, 1]$, on

$$\text{a } g'(t) = \frac{f'(t)}{1+t} - \frac{f(t)}{(1+t)^2}. \text{ Posons } f = t \mapsto \frac{t^{n+2}}{n+2}. \text{ Les applications } f \text{ et } g \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ donc par IPP on a}$$

$$\int_0^1 t^{n+1} g(t) dt = \int_0^1 f'(t) g(t) dt = \left[f(t) g(t) \right]_0^1 - \int_0^1 f(t) g'(t) dt = \frac{g(1)}{n+2} - \int_0^1 f(t) g'(t) dt.$$

De même, posons $u = t \mapsto \frac{t^{n+3}}{(n+2)(n+3)}$ et $v = g'$. Les applications u et v sont $\mathcal{C}^1$ donc par IPP on a

$$\int_0^1 f(t) g'(t) dt = \int_0^1 u'(t) v(t) dt = \left[u(t) v(t) \right]_0^1 - \int_0^1 u(t) v'(t) dt = \frac{g'(1)}{(n+2)(n+3)} - \int_0^1 u(t) v'(t) dt.$$

$$\text{En conclusion on a } \int_0^1 t^{n+1} g(t) dt = \frac{g(1)}{n+2} - \frac{g'(1)}{(n+2)(n+3)} + \int_0^1 u(t) v'(t) dt \text{ et on a } g(1) = \frac{f(1)}{2},$$

$$g'(1) = \frac{f'(1)}{2} - \frac{f(1)}{4} = \frac{f(1) - 2f'(1)}{4} \text{ et } \int_0^1 u(t) v'(t) dt = \int_0^1 \frac{t^{n+3}}{(n+2)(n+3)} g''(t) dt. \text{ D'où le résultat.}$$

8. Montrer que $\frac{1}{n+2} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque n tends vers $+\infty$, où α, β sont deux constantes à déterminer.

Calculer de même le développement limité de $\frac{1}{(n+2)(n+3)}$ à l'ordre 2.

$$\text{On a : } \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}} \right) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{2}{n}\right) \right) = \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ car } \frac{2}{n} \rightarrow 0 \text{ et par absorption des constantes par les } o(\dots). \text{ De même on a : } \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}} \right) = \frac{1}{n^2} (1 + o(1)) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

9. Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^{n+3} g''(t) dt = 0$.

La fonction $\widehat{f} = t \mapsto |t^3 g''(t)|$ est continue sur $[0, 1]$ par théorèmes généraux, et positive puisque c'est une valeur absolue.

Appliquons la question 2 à $\widehat{f}$ plutôt qu'à f , on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 |t^{n+3} g''(t)| dt = 0$. Par inégalité triangulaire sur les intégrales, on a $0 \leq \left| \int_0^1 t^{n+3} g''(t) dt \right| \leq \int_0^1 |t^{n+3} g''(t)| dt$ et donc on a $\left| \int_0^1 t^{n+3} g''(t) dt \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par TdG, puis $\int_0^1 t^{n+3} g''(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par définition.

10. En déduire que $S_n = \ell + \gamma \frac{(-1)^n}{n} + \delta \frac{(-1)^n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$, où γ et δ sont deux constantes à déterminer.

$$\begin{aligned} \text{On a : } S_n - \ell &= S_n - \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt && \text{d'après la question 5.} \\ &= (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} f(t) dt && \text{d'après la question 4.} \\ &= (-1)^n \int_0^1 t^{n+1} g(t) dt && \text{par définition de } g. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et donc (question 7.) : } S_n - \ell &= (-1)^n \left(\frac{f(1)}{2(n+2)} + \frac{f(1) - 2f'(1)}{4(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \int_0^1 t^{n+3} g''(t) dt \right); \\ \text{i. e. (question 8.) : } S_n - \ell &= (-1)^n \left(\frac{f(1)}{2n} - \frac{f(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{f(1) - 2f'(1)}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2} \int_0^1 t^{n+3} g''(t) dt \right); \\ \text{i. e. (question 9.) : } S_n - \ell &= (-1)^n \left(\frac{f(1)}{2n} - \frac{f(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{f(1) - 2f'(1)}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2} o(1) \right); \text{ et fina-} \\ \text{lement } S_n - \ell &= (-1)^n \left(\frac{f(1)}{2n} - \frac{3f(1) + 2f'(1)}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right). \end{aligned}$$

$$\text{Autrement dit } \gamma = \frac{f(1)}{2} \text{ et } \delta = -\frac{3f(1) + 2f'(1)}{4}.$$

Partie C

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle. Pour tout n entier naturel, on pose : $\begin{cases} \Delta^0 a_n = a_n \\ \forall k \in \mathbf{N}^*, \Delta^k a_n = \Delta^{k-1} a_n - \Delta^{k-1} a_{n+1} \end{cases}$.

11. Exprimer $\Delta^k a_n$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ le plus simplement possible.

- On a : $\Delta^1 a_n = \Delta^0 a_n - \Delta^0 a_{n+1} = a_n - a_{n+1}$.
- On a : $\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_n - \Delta^1 a_{n+1} = (a_n - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_{n+2}) = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}$.
- On a : $\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_n - \Delta^2 a_{n+1} = (a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}) - (a_{n+1} - 2a_{n+2} + a_{n+3}) = a_n - 3a_{n+1} + 3a_{n+2} - a_{n+3}$.
- On a : $\Delta^4 a_n = \Delta^3 a_n - \Delta^3 a_{n+1} = (a_n - 3a_{n+1} + 3a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+1} - 3a_{n+2} + 3a_{n+3} - a_{n+4}) = a_n - 4a_{n+1} + 6a_{n+2} - 4a_{n+3} + a_{n+4}$.

12. Démontrer que, pour tous k et n entiers naturels, $\Delta^k a_n = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} a_{n+i}$.

Méthode attendue : On peut rédiger une récurrence sans astuce. Montrons par récurrence qu'on a $\forall k \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, \Delta^k a_n = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} s^i(a_n)$. Convenons pour alléger les notations de noter $\mathcal{P}_k$ l'énoncé

$$\mathcal{P}_k : \forall n \in \mathbf{N}, \Delta^k a_n = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} s^i(a_n).$$

Initialisation : Montons $\mathcal{P}_0$. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a bien $\Delta^0 a_n = a_n = (-1)^0 \binom{0}{0} a_{n+0} = \sum_{i=0}^0 (-1)^i \binom{k}{i} a_{n+i}$. Ceci étant vrai pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a bien établi $\mathcal{P}_0$.

Hérédité : Soit $k \in \mathbf{N}$ et supposons $\mathcal{P}_k$ (hypothèse de récurrence). Soit $n \in \mathbf{N}$. Par définition on a $\Delta^{k+1} a_n = \Delta^k a_n - \Delta^k a_{n+1} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} a_{n+i} - \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} a_{n+1+i}$ par hypothèse de récurrence.

En notant qu'on a $\binom{k}{k+1} = 0$ la relation de Chasles donne $\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} a_{n+i} = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k}{i} a_{n+i}$.

En notant qu'on a $\binom{k}{-1} = 0$ et avec un changement d'indice : $\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} a_{n+1+i} = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^{i-1} \binom{k}{i-1} a_{n+i}$.

On conclut avec la formule de Pascal : $\Delta^{k+1} a_n = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \left(\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} \right) a_{n+i} = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k+1}{i} a_{n+i}$.

La propriété est donc bien héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $k \geq 0$.

Méthode plus conceptuelle : On vient en fait juste de redémontrer la formule du binôme. Comprenons pourquoi. Notons $s : \begin{cases} \mathbf{R}^{\mathbf{N}} & \rightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ (u_n)_n & \mapsto (u_{n+1})_n \end{cases}$. L'application s est clairement un endomorphisme de $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Par définition, pour tout entier $i \in \mathbf{N}$ et toute suite $(u_n)_n$ on a $s^i((u_n)_n) = (u_{n+i})_n$.

Notons $f_k : \begin{cases} \mathbf{R}^{\mathbf{N}} & \rightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ (u_n)_n & \mapsto (\Delta^k u_n)_n \end{cases}$.

La définition de Δ^k se reformule $\begin{cases} f_0 = \text{id}_E \\ \forall k \in \mathbf{N}^*, f_k = f_{k-1} - f_{k-1} \circ s = f_{k-1} \circ (\text{id}_E - s) \end{cases}$.

Soit $k \in \mathbf{N}$. On a donc $f_k = \underbrace{(\text{id}_E - s) \circ \dots \circ (\text{id}_E - s)}_{k \text{ fois}} = (\text{id}_E - s)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} s^i$ en utilisant la formule

du binôme de Newton dans l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$, ce qui est loisible puisque id_E et s commutent.

En appliquant la relation précédente à $(a_n)_n$, on trouve bien $\forall n \in \mathbf{N}, \Delta^k a_n = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} s^i(a_n)$.

13. Soient $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, et pour tout n entier naturel, $a_n = \varphi^{(n)}(0)$. Prouver que, pour tout k entier naturel, $\Delta^k a_0 = \psi^{(k)}(0)$, où $\psi(t) = \varphi(-t)\mathbf{e}^t$. (On rappelle que la notation $\psi^{(k)}$ désigne la dérivée k^e de la fonction ψ .)

Même chose que pour l'exercice 85 de la banque CCINP, on peut utiliser Leibniz ou Taylor.

Avec Leibniz : L'application φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc l'application $t \mapsto \varphi(-t)$ l'est aussi et, pour tout $i \in \mathbf{N}$ on a $\frac{d^i}{dt^i}(\varphi(-t)) = (-1)^i \varphi^{(i)}(t)$.

Soit $k \in \mathbf{N}$. Les applications $\exp$ et $t \mapsto \varphi(-t)$ sont de classe $\mathcal{C}^k$, on peut donc appliquer la formule de Leibniz qui assure que ψ est $\mathcal{C}^k$ et qu'on a $\psi^{(k)} = t \mapsto \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i \varphi^{(i)}(t) \exp^{(k-i)}(t) = t \mapsto \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i \varphi^{(i)}(t) \mathbf{e}^t$.

En évaluant en 0 : $\psi^{(k)}(0) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i \varphi^{(i)}(0) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i a_i = \Delta^k a_0$ par la question précédente.

Avec Taylor : L'application φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc l'application ψ l'est aussi par théorèmes généraux. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^n$ et ont donc un $DL_n(0)$ d'après le théorème de Taylor-Young.

En particulier on a $\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} x^k + o(x^n)$, et donc, par changement de variable monomial et par produit, $\psi(x) = \varphi(-x)e^x = \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k a_k x^k}{k!} + o(x^n) \right) \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \right) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i a_i}{i!(k-i)!} \right) x^k + o(x^n)$.

En particulier on a aussi $\psi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$.

Finalement, par unicité d'un DL, on a donc $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i a_i}{i!(k-i)!}$ c'est-à-dire

$\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\psi^{(k)}(0) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{k!}{i!(k-i)!} a_i = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} a_i = \Delta^k a_0$ d'après la question précédente.

Ceci étant vrai pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a bien $\forall k \in \mathbb{N}$, $\psi^{(k)}(0) = \Delta^k a_0$.

14. Dans cette question, on veut déterminer $\Delta^k a_0$ si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $a_n = \frac{1}{n+1}$.

(a) Calculer dans ce cas $\Delta^k a_0$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Que conjecturez-vous ?

- Pour $k = 0$ on a $\Delta^0 a_0 = a_0 = 1$.

Pour les suivants, on reprend le résultat de la question 11.

- $\Delta^1 a_0 = a_0 - a_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
- $\Delta^2 a_0 = a_0 - 2a_1 + a_2 = 1 - 2\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.
- $\Delta^3 a_0 = a_0 - 3a_1 + 3a_2 - a_3 = 1 - 3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.
- $\Delta^4 a_0 = a_0 - 4a_1 + 6a_2 - 4a_3 + a_4 = 1 - 4\frac{1}{2} + 6\frac{1}{3} - 4\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$.

Il semble difficile de conjecturer autre chose que $\Delta^k a_0 = \frac{1}{k+1} = a_k$.

(b) Justifier que l'application $\varphi : t \in \mathbf{R}^* \mapsto \frac{e^t - 1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0.

On admet que l'application φ ainsi prolongée en 0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

On a $\frac{e^t - 1}{t} = \frac{1 + t + o(t) - 1}{t} = 1 + o(1) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$.

Donc φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1$.

(c) Soit n un entier naturel. Calculer le développement limité de φ en 0 à l'ordre n .

En déduire l'expression de $\varphi^{(n)}(0)$.

$$\varphi(t) = \frac{e^t - 1}{t} = \frac{\sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!} + o(t^{n+1}) - 1}{t} = \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^k}{k!} + o(t^{n+1})}{t} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^{k-1}}{k!} + o(t^n) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{(k+1)!} + o(t^n).$$

On a admis que φ était de classe $\mathcal{C}^\infty$. En particulier elle est de classe $\mathcal{C}^n$ et on peut lui appliquer le

théorème de Taylor-Young : $\varphi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k + o(t^n)$.

Par unicité des développements limités, on a donc $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{(k+1)!}$ et donc en

particulier $\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{(n+1)!}$ donc $\varphi^{(n)}(0) = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$.

(d) En utilisant la question 13, déterminer l'expression de $\Delta^k a_0$, pour k entier naturel.

D'après la question 14.(b), la fonction φ étudiée ici vérifie bien $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(k)} = \frac{1}{k+1} = a_k$. On peut donc

appliquer la question 13 : $\forall k \in \mathbf{N}$, $\Delta^k a_0 = \psi^{(k)}(0)$ avec $\psi = t \mapsto \varphi(-t)e^t = t \mapsto \frac{e^{-t} - 1}{-t}e^t = t \mapsto \varphi(t)$.
On a donc bien, joie, $\Delta^k a_0 = \psi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(0) = a_k = \frac{1}{k+1}$ comme conjecturé.

Partie C

On reprend les notations de la partie **A**, la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ étant toujours définie par $u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$.

15. En utilisant la question **12**, montrer que $\forall k \in \mathbf{N}$, $\Delta^k u_0 = \int_0^1 (1-t)^k f(t) dt$.

D'après la question **12** : $\Delta^k u_0 = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} u_i = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \int_0^1 t^i f(t) dt = \int_0^1 \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} t^i f(t) dt$
par linéarité de l'intégrale, et donc $\Delta^k u_0 = \int_0^1 (-1)^k \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} t^i f(t) dt = \int_0^1 (-1)^k (t-1)^k f(t) dt$ et
donc on a bien $\Delta^k u_0 = \int_0^1 (1-t)^k f(t) dt$.

Pour tout n entier naturel non nul, on pose $S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta^{k-1} u_0}{2^k}$.

16. Prouver que, pour tout n entier naturel non nul, $S'_n = \ell - \frac{1}{2^n} \int_0^1 (1-t)^n \frac{f(t)}{1+t} dt$.

On a :

$$\begin{aligned}
 S'_n &= \sum_{k=1}^n \frac{\Delta^{k-1} u_0}{2^k} && \text{par définition} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{\int_0^1 (1-t)^{k-1} f(t) dt}{2^k} && \text{d'après 15} \\
 &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n \frac{(1-t)^{k-1}}{2^k} \right) f(t) dt && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
 &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-t)^k}{2^{k+1}} \right) f(t) dt && \text{en changeant d'indice} \\
 &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1-t}{2} \right)^k \right) \frac{f(t)}{2} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{1 - \left(\frac{1-t}{2} \right)^n}{1 - \frac{1-t}{2}} \frac{f(t)}{2} dt && \text{d'après l'identité géométrique, car } \left| \frac{1-t}{2} \right| \neq 1 \text{ pour } t \in [0, 1] \\
 &= \int_0^1 \frac{1 - \left(\frac{1-t}{2} \right)^n}{1+t} f(t) dt \\
 &= \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt - \frac{1}{2^n} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{1+t} f(t) dt && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
 &= \ell - \frac{1}{2^n} \int_0^1 (1-t)^n \frac{f(t)}{1+t} dt && \text{par définition de } \ell
 \end{aligned}$$

17. En déduire la limite de la suite $(S'_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Pour tout $t \in [0, 1]$ on a $\left| (1-t)^n \frac{f(t)}{1+t} \right| \leq 1^n \left| \frac{f(t)}{1+t} \right| \leq 1^n \frac{|f(t)|}{1+0} = |f(t)| \leq \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ et donc par croissance de

l'intégrale $\int_0^1 \left| (1-t)^n \frac{f(t)}{1+t} \right| dt \leq \max_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et en particulier $\left(\int_0^1 (1-t)^n \frac{f(t)}{1+t} dt \right)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée, donc on a $\frac{1}{2^n} \int_0^1 (1-t)^n \frac{f(t)}{1+t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par TdG. Puis, par P.A.L. : $S'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Remarque : bien que cela ne soit pas demandé, on peut même être plus précis. Le changement de variable $x = 1 - t$ donne $\int_0^1 (1-t)^n \frac{f(t)}{1+t} dt = \int_0^1 x^n \frac{f(1-x)}{2-x} dx = \int_0^1 x^n \bar{f}(x) dx$ en notant $\bar{f} = x \mapsto \left| \frac{f(1-x)}{2-x} \right|$. En appliquant la question 2 à $\bar{f}$ plutôt qu'à f , puis l'inégalité triangulaire sur les intégrales, on obtient $S'_n - \ell = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Ainsi la suite $(S'_n)_n$ converge vers la même limite que la suite $(u_n)_n$, mais, alors que la suite $(u_n)_n$ peut converger très lentement, la suite $(S'_n)_n$, elle, converge beaucoup plus rapidement. Le procédé présenté ici permet donc d'accélérer la convergence d'une telle suite, de façon assez spectaculaire.

18. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}$.

On reconnaît l'expression de S'_n pour $(u_n)_n = \left(\frac{1}{n+1}\right)_n$ (question 14.(d)).

Cette suite $(u_n)_n$ est celle associée à la fonction $f = t \mapsto 1$ (question 6.(a)).

D'après la question 17 on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$.

Sauf que maintenant ça converge très vite.

DEUXIÈME PROBLÈME

$\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ désigne le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

Pour tous réels a et b , on définit la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ suivante : $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

On note ω le nombre complexe $\omega = a + ib$, que l'on note aussi $\omega = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho \in \mathbf{R}_+$ et $\theta \in \mathbf{R}$.

1 Partie A

Considérons $\mathcal{H} = \{M_{a,b}, (a,b) \in \mathbf{R}^2\}$.

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Préciser la dimension et une base de $\mathcal{H}$.

On a : $\mathcal{H} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\} = \text{Vect}(I_2, J)$, avec I_2 la matrice identité et en notant $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ de famille génératrice (I_2, J) .

De plus les matrices I_2 et J ne sont pas colinéaires donc (I_2, J) est libre : c'est donc une base de $\mathcal{H}$.

Finalement $\mathcal{H}$ a une base formée de 2 vecteurs donc $\mathcal{H}$ est de dimension 2.

2. Pour tout a, b, c, d réels, prouver que $M_{a,b} \times M_{c,d} = M_{e,f}$ où e et f sont deux réels que l'on exprimera en fonction de a, b, c, d .

Le calcul montre qu'on a $M_{a,b} \times M_{c,d} = M_{e,f}$ pour $e + if = (a + ib)(c + id)$ i. e. $\begin{cases} e = ac - bd \\ f = ad + bc. \end{cases}$

3. Calculer $M_{a,b} \times M_{a,-b}$. En déduire que si la matrice $M_{a,b}$ est inversible, alors son inverse $M_{a,b}^{-1}$ appartient aussi à $\mathcal{H}$.

La question précédente montre qu'on a $M_{a,b} \times M_{a,-b} = (a^2 + b^2)I_2$. De plus $M_{a,b}$ est inversible si et seulement si son déterminant $a^2 + b^2$ est non nul. Si elle l'est son inverse est son inverse à droite, donc c'est $\frac{1}{a^2 + b^2} M_{a,-b}$ (mais on le savait déjà : la formule pour l'inverse d'une matrice 2×2 est connue).

Par définition on a $\frac{1}{a^2+b^2}M_{a,-b} = \frac{1}{\rho^2}M_{a,-b} = M_{\frac{a}{\rho^2}, \frac{-b}{\rho^2}} \in \mathcal{H}$.

On peut aussi remarquer, connaissant la formule pour la forme algébrique de l'inverse d'un nombre complexe, que pour $(a, b) \neq (0, 0)$ on a donc $M_{a,b}^{-1} = M_{a',b'}$ avec $a' + ib' = (a + ib)^{-1}$.

Remarque : on a en fait montré dans les trois questions précédentes que $\mathcal{H}$ est un corps et $\begin{cases} \mathbf{C} & \rightarrow \mathcal{H} \\ a + ib & \mapsto M_{a,b} \end{cases}$ un isomorphisme de corps.

4. Montrer que, pour tout n entier naturel : $(M_{a,b})^n = \rho^n M_{\cos(n\theta), \sin(n\theta)}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Notons $a_n + ib_n = (a + ib)^n$.

D'après la question 2. On a $M_{a,b}^2 = M_{a_2,b_2}$ puis $M^2 = M_{a,b}M_{a_2,b_2} = M_{a_3,b_3}$, etc.

Par récurrence immédiate : $M_{a,b}^n = M_{a_n,b_n}$.

Or on a $(a + ib)^n = \left(\rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))\right)^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ d'après la formule de Moivre, et donc finalement $M_{a,b}^n = M_{\rho^n \cos(n\theta), \rho^n \sin(n\theta)} = \rho^n M_{\cos(n\theta), \sin(n\theta)}$.

Dans toute la suite du problème, a et b désignent deux nombres réels, avec b non nul.

Partie B

Notons $\mathcal{F}$ le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et G le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par les deux fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto e^{ax} \sin(bx) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto e^{ax} \cos(bx).$$

Enfin, on désigne par ψ l'application qui, à toute fonction $f \in G$, associe sa dérivée f' .

5. Montrer que la famille (f_1, f_2) est une base de G .

On a $f_1(0) = 0 \neq 1 = f_2(0)$ et f_1 n'est pas la fonction nulle, donc f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires ; la famille (f_1, f_2) est donc libre et c'est donc une base de du sous-espace vectoriel G qu'elle engendre.

6. Justifier que ψ est un endomorphisme de G , et déterminer la matrice M associée à ψ dans la base (f_1, f_2) .

Notons $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$.

On a $f_1' = x \mapsto ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos(bx) = af_1 + bf_2$ et $f_2' = x \mapsto ae^{ax} \cos bx - be^{ax} \sin(bx) = -bf_1 + af_2$.

On sait que la dérivation est linéaire. Pour montrer que ψ est un endomorphisme de G , il reste à montrer que G est stable par dérivation. Mais on vient de voir que f_1' et f_2' appartiennent à G , il en va donc de même de toute combinaison linéaire de ces deux fonctions, c'est-à-dire de tout vecteur de G .

Les calculs de dérivées précédents se reformulent : $\begin{matrix} | \\ f_1' \\ |_{\mathcal{B}} \end{matrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{matrix} | \\ f_2' \\ |_{\mathcal{B}} \end{matrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Puis : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} | & | \\ f_1' & f_2' \\ |_{\mathcal{B}} & |_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = M_{a,b}$, joie.

7. Prouver que toute fonction appartenant à G admet une unique primitive appartenant à G . Déterminer, en utilisant la matrice M , l'unique primitive de f appartenant à G .

Soit $f \in G$, elle est donc de la forme $f = \alpha f_1 + \beta f_2$. Toute fonction $F \in G$ est de la forme $F = \lambda f_1 + \mu f_2$, et

se trouve être une primitive de f si et seulement si $\psi(F) = f$, i. e. si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi) \times \begin{matrix} | \\ F \\ |_{\mathcal{B}} \end{matrix} = \begin{matrix} | \\ f \\ |_{\mathcal{B}} \end{matrix}$,

autrement dit $M_{a,b} \times \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Comme on a $b \neq 0$, on a en particulier $a^2 + b^2 \neq 0$ et donc $M_{a,b}$ est inversible d'inverse $\frac{1}{a^2+b^2}M_{a,-b}$.

Ainsi $F = \lambda f_1 + \mu f_2$ est une primitive de $f = \alpha f_1 + \beta f_2$ si et seulement si $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2} M_{a,-b} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Il y a donc unicité d'une telle primitive de f dans F .

Pour $f = f_1$ on a $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ et donc $F = x \mapsto \frac{a}{a^2+b^2} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a^2+b^2} e^{ax} \cos(bx)$.

8. Vérifier que la matrice M^2 peut s'écrire comme combinaison linéaire de M et de la matrice unité I_2 . En déduire que G est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle que l'on précisera.

Je garde la notation $M_{a,b}$ pour M .

En raisonnant purement matriciellement : On a vu que $M_{a,b}^2 = M_{a^2,b^2} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $M_{a,b}^2 = \begin{pmatrix} -a^2 - b^2 + 2a^2 & -2ab \\ 2ab & -a^2 - b^2 + 2a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a^2 + b^2) & 0 \\ 0 & -(a^2 + b^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a^2 & 2ab \\ -2ab & 2a^2 \end{pmatrix}$.

C'est-à-dire : $M_{a,b}^2 = -(a^2 + b^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2a \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = 2aM_{a,b} - (a^2 + b^2)I_2$.

Remarque : ça passe mieux si on connaît la relation $A^2 = \text{Tr}(A)A - \det(A)I_2$ valable pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$...

En utilisant l'isomorphisme avec $\mathbf{C}$: On a $(a + ib)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = 2a^2 + 2abi - a^2 - b^2$, donc $(a + ib)^2 = 2a(a + ib) - (a^2 + b^2)$, mais on a vu que $\begin{cases} \mathbf{C} & \rightarrow \mathcal{H} \\ a + ib & \mapsto M_{a,b} \end{cases}$ un isomorphisme de corps, en appliquant la réciproque de cet isomorphisme à l'égalité précédente, on obtient directement $M_{a,b}^2 = 2aM_{a,b} - (a^2 + b^2)I_2$.

Comme $f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme d'algèbre, on a donc $\psi^2 = 2a\psi - (a^2 + b^2)\text{id}_G$, autrement dit $\forall f \in G, f'' = 2af' - (a^2 + b^2)f$, ce qui montre que G est inclus dans l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$, mais l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est de dimension 2 ; comme G l'est aussi ces deux sous-espaces vectoriels coïncident.

Partie C

E désigne un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, et φ l'endomorphisme de E ayant pour matrice $M_{a,b}$ dans la base $\mathcal{B}$.

9. Montrer que $\text{Ker}(\varphi - \omega \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(\varphi - \bar{\omega} \text{id}_E)$ sont deux droites vectorielles de E , engendrées respectivement par les vecteurs $u = e_1 - ie_2$ et $v = e_1 + ie_2$.

• Soit $s \in E$ et notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{matrix} | \\ s \\ |_{\mathcal{B}} \end{matrix}$ la décomposition du vecteur s dans la base $\mathcal{B}$ (autrement dit on convient qu'on a $s = xe_1 + ye_2$).

On a $s \in \text{Ker}(\varphi - \omega \text{id}_E)$ si et seulement si $\varphi(s) = \omega s$, si et seulement si $M_{a,b} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega x \\ \omega y \end{pmatrix}$.

En notant qu'on a $\omega = a + ib$, ceci équivaut à $\begin{cases} ax - by = ax + ibx \\ bx + ay = ay + iby \end{cases}$, ou encore à $\begin{cases} b(ix + y) = 0 \\ b(x - iy) = 0 \end{cases}$, ou encore à $\begin{cases} ix + y = 0 \\ x - iy = 0 \end{cases}$ puisqu'on a $b \neq 0$. Les deux équations ainsi obtenues sont équivalentes (la première vaut i fois la seconde), et vérifiées si et seulement si $y = -ix$, i. e. si et seulement si s est de la forme

$x(e_1 - \mathbf{i}e_2)$ avec $x \in \mathbf{C}$. En conclusion : $\text{Ker}(\varphi - \text{id}_E) = \{x(e_1 - \mathbf{i}e_2), x \in \mathbf{C}\} = \text{Vect}(e_1 - \mathbf{i}e_2) = \text{Vect}(u)$.

- Soit $s \in E$ et notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ s \\ |_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$. On a $s \in \text{Ker}(\varphi - \overline{\omega}\text{id}_E)$ si et seulement si $M_{a,b}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\omega}x \\ \overline{\omega}y \end{pmatrix}$.

En notant qu'on a $\overline{\omega} = a - \mathbf{i}b$, ceci équivaut à $\begin{cases} ax - by = ax - \mathbf{i}bx \\ bx + ay = ay - \mathbf{i}by \end{cases}$, ou encore à $\begin{cases} \mathbf{i}x - y = 0 \\ x + \mathbf{i}y = 0 \end{cases}$ puisqu'on a $b \neq 0$. Les deux équations ainsi obtenues sont équivalentes (la première vaut $\mathbf{i}$ fois la seconde), et vérifiées si et seulement si $y = \mathbf{i}x$. En conclusion : $\text{Ker}(\varphi - \text{id}_E) = \{x(e_1 + \mathbf{i}e_2), x \in \mathbf{C}\} = \text{Vect}(e_1 + \mathbf{i}e_2) = \text{Vect}(v)$.

10. Justifier que la famille $\mathcal{B}' = (u, v)$ est une base de E .

Préciser la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et calculer son inverse P^{-1} .

On a $\begin{pmatrix} | \\ u \\ |_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{i} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} | \\ v \\ |_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{i} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \end{pmatrix}$ de $\mathbf{C}^2$ sont clairement non colinéaires donc forment une base de $\mathbf{C}^2$. Comme l'image d'une base par un isomorphisme est une base, (u, v) forme une base de E .

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est celle qui permet d'obtenir la décomposition d'un vecteur de $\mathcal{B}$ à partir de sa décomposition dans $\mathcal{B}'$. Il s'agit de $\begin{pmatrix} | & | \\ u & v \\ |_{\mathcal{B}} & |_{\mathcal{B}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathbf{i} & \mathbf{i} \end{pmatrix}$.

Son inverse est $\frac{1}{2\mathbf{i}} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & -1 \\ \mathbf{i} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ 1 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$.

11. Déterminer sans calcul la matrice D associée à φ dans la base $\mathcal{B}'$, et exprimer $M_{a,b}$ en fonction de D, P et P^{-1} .

Ce n'est pas sans calcul, c'est sans calcul supplémentaire : on a bien fait un calcul, mais dans la question 9.

On y a obtenu : $D = \begin{pmatrix} | & | \\ \varphi(u) & \varphi(v) \\ |_{\mathcal{B}'} & |_{\mathcal{B}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \overline{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \mathbf{i}b & 0 \\ 0 & a - \mathbf{i}b \end{pmatrix}$.

D'après la formule de changement de base, on a : $M_{a,b} = PDP^{-1}$

12. Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer la matrice D^n en fonction de n, ρ et θ . Retrouver ainsi le résultat de la question A.4.

La matrice D étant diagonale on a $D^n = \begin{pmatrix} \omega^n & 0 \\ 0 & \overline{\omega}^n \end{pmatrix}$, et, puisqu'on a $\omega = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$, on peut l'écrire

$D^n = \rho^n \begin{pmatrix} e^{\mathbf{i}n\theta} & 0 \\ 0 & e^{-\mathbf{i}n\theta} \end{pmatrix}$ d'après la formule de Moivre.

On a donc $M_{a,b}^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \frac{\rho^n}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathbf{i} & \mathbf{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\mathbf{i}n\theta} & 0 \\ 0 & e^{-\mathbf{i}n\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ 1 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$ et on effectue le

calcul : $M_{a,b}^n = \frac{\rho^n}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathbf{i} & \mathbf{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\mathbf{i}n\theta} & \mathbf{i}e^{\mathbf{i}n\theta} \\ e^{-\mathbf{i}n\theta} & -\mathbf{i}e^{-\mathbf{i}n\theta} \end{pmatrix} = \frac{\rho^n}{2} \begin{pmatrix} 2\cos(n\theta) & -2\sin(n\theta) \\ 2\sin(n\theta) & 2\cos(n\theta) \end{pmatrix}$ ce qui redonne bien le résultat de la question A.4.

Partie D

À la matrice $M_{a,b}$ on associe la fonction $h_{M_{a,b}}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{a}{b} \right\}, h_{M_{a,b}}(x) = \frac{ax - b}{bx + a}.$$

13. Construire le tableau de variation de la fonction $h_{M_{a,b}}$ et justifier que $h_{M_{a,b}}$ forme une bijection de $\mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{a}{b}\right\}$ sur une partie de $\mathbf{R}$ à préciser.

Notons pour alléger $h = h_{M_{a,b}}$ et $D_h = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{a}{b}\right\}$.

La fonction h est dérivable sur D_h comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et on a $\forall x \in D_h, h'(x) = \frac{a^2 + b^2}{(bx + a)^2}$.

Elle reste strictement positive sur D_h puisqu'on a $b \neq 0$.

Comme h' reste positive sur $] -\infty, -\frac{a}{b}[$ qui est un intervalle, la fonction h est strictement croissante sur $] -\infty, -\frac{a}{b}[$.

Comme h' reste positive sur $] -\frac{a}{b}, +\infty[$ qui est un intervalle, la fonction h est strictement croissante sur $] -\frac{a}{b}, +\infty[$.

Bien sûr h n'est pas strictement croissante sur D_h ! Précisément on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{a}{b}$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{a}{b}-} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\frac{a}{b}+} = -\infty$. La fonction h est dérivable donc en particulier continue, et donc ses restrictions le sont. D'après le théorème de la bijection, la restriction de h à $] -\infty, -\frac{a}{b}[$ induit une bijection sur $] \frac{a}{b}, +\infty[$ et la restriction de h à $] -\frac{a}{b}, +\infty[$ induit une bijection sur $] -\infty, \frac{a}{b}[$.

Finalement, h est une bijection de $\mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{a}{b}\right\}$ sur $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{a}{b}\right\}$.

14. Prouver que $(h_{M_{a,b}})^{-1} = h_{(M_{a,b})^{-1}}$.

Je continue à noter h pour $h_{M_{a,b}}$. La fonction h^{-1} est telle que, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{a}{b}\right\}$ et tout $y \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{a}{b}\right\}$, on a $y = h(x) \Leftrightarrow x = h^{-1}(y)$.

On résout : $y = h(x) \Leftrightarrow y = \frac{ax-b}{bx+a} \Leftrightarrow (bx+a)y = ax-b \Leftrightarrow (-by+a)x = ay+b \Leftrightarrow x = \frac{ay+b}{by+a}$.

Mais comme $a^2 + b^2 \neq 0$, on peut diviser numérateur et dénominateur par $a^2 + b^2$ ce qui donne $x = h_{M_{a,b}^{-1}}(y)$.

On a donc bien $h^{-1} = h_{(M_{a,b})^{-1}}$.

On veut construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ en utilisant la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbf{N}, x_{n+1} = h_{M_{a,b}}(x_n) = \frac{ax_n - b}{bx_n + a}. \end{cases}$$

15. À quelle condition sur a et b peut-on construire x_1 ? peut-on construire x_2 ?

On peut construire x_1 si et seulement si $x_0 \in D_h$, i. e. si et seulement si $0 \neq -\frac{a}{b}$, i. e. ssi $a \neq 0$.

On peut construire x_2 si et seulement si $x_1 \in D_h$, i. e. si et seulement si $-\frac{b}{a} \neq -\frac{a}{b}$, i. e. ssi $b^2 \neq a^2$.

16. Supposons que l'on ait pu construire la suite jusqu'à un certain rang x_n inclus.

- (a) Établir qu'il existe un réel μ_n non nul tel que $(M_{a,b})^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_n \begin{pmatrix} x_n \\ 1 \end{pmatrix}$.

De façon générale, lorsqu'on effectue une composée de la forme $h_{M_{a,b}} \circ h_{M_{c,d}}$, on obtient $h_{M_{a,b} \times M_{c,d}}$ par définition du produit matriciel.

En particulier, on obtient qu'on a pour tout entier n : $\underbrace{h_{M_{a,b}} \circ \dots \circ h_{M_{a,b}}}_{n \text{ fois}} = h_{(M_{a,b})^n}$.

Reprenons la notation $M_{a,b}^n = \begin{pmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$.

On a, par définition, $x_n = \underbrace{h_{M_{a,b}} \circ \dots \circ h_{M_{a,b}}}_{n \text{ fois}}(x_0) = h_{(M_{a,b})^n}(0) = \frac{-b_n}{a_n}$.

Et donc $(M_{a,b})^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n x_n \\ a_n \end{pmatrix} = a_n \begin{pmatrix} x_n \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui est le résultat demandé en posant $\mu_n = a_n$.

- (b) En déduire une expression de x_n dépendant uniquement de n et θ .

On a déjà vu (de deux façons différentes) qu'avec les notations précédentes, on a $\begin{cases} a_n = \rho^n \cos(n\theta) \\ b_n = \rho^n \sin(n\theta). \end{cases}$

On a donc $x_n = \frac{-b_n}{a_n} = -\tan(n\theta)$.

(c) Vérifier que l'on peut construire x_{n+1} si et seulement si $\cos((n+1)\theta) \neq 0$.

On peut construire x_{n+1} si et seulement si $h_{M_{a,b}}(x_n)$ a un sens, *i. e.* si et seulement si $bx_n + a \neq 0$, *i. e.* si et seulement si $\rho \sin(\theta)x_n + \rho \cos(\theta) \neq 0$.

On a $b \neq 0$ donc $\rho \neq 0$, et on a $\cos(n\theta) \neq 0$ puisqu'on a supposé que $x_n = -\frac{\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)}$ avait un sens. La non-égalité précédente équivaut donc à $-\sin(\theta)\sin(n\theta) + \cos(\theta)\cos(n\theta) \neq 0$ *i. e.* $\cos((n+1)\theta) \neq 0$.

17. Montrer que l'on peut construire tous les termes de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ si, et seulement si,

$$\theta \notin \left\{ \frac{2p+1}{2q}\pi, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

On peut construire x_0 puisque c'est 0.

Puis, pour tout entier $n \geq 1$, on peut construire x_n si et seulement si $x_0, \dots, x_{n-1}$ peuvent être construits et qu'on a $\cos(n\theta) \neq 0$.

Autrement dit, pour tout entier $n \geq 1$, on peut construire x_n si et seulement si $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \cos(k\theta) \neq 0$.

On peut donc construire tous les termes de $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ si et seulement si $(\cos(n\theta))_{n \in \mathbf{N}^*}$ ne s'annule pas.

On a $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \exists p \in \mathbf{Z}, x = \frac{\pi}{2} + p\pi$.

Donc, pour $n \geq 1 : \cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists p \in \mathbf{Z}, \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{p\pi}{n} = \frac{2p+1}{2n}\pi$.

Puis : $(\cos(n\theta))_{n \in \mathbf{N}^*}$ s'annule $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{N}^*, \exists p \in \mathbf{Z}, \theta = \frac{2p+1}{2n}\pi$.

Ou encore : $(\cos(n\theta))_{n \in \mathbf{N}^*}$ s'annule $\Leftrightarrow \theta \in \left\{ \frac{2p+1}{2n}\pi, p \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^* \right\}$.

Et enfin : $(\cos(n\theta))_{n \in \mathbf{N}^*}$ ne s'annule pas $\Leftrightarrow \theta \notin \left\{ \frac{2p+1}{2n}\pi, p \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^* \right\}$.

Et on peut renommer n en q si on tient à garder les notations de l'énoncé.