

Exercice 1 (Résultat de cours). Montrer que si I est un intervalle $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ et si $F : x \in I \rightarrow \int_a^x f$ alors

- a) F est lipschitzienne sur tous les segments de I , en particulier F est continue sur I
- b) F est dérivable en un point $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ si, et seulement si, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

Fonctions définies par des intégrales.. avec le x dans l'intégrale

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dt$.

- a) Montrer que f est décroissante.
- b) Montrer que f est dérivable, calculer f' , et en déduire que f est $\mathcal{C}^\infty$.
- c) Par un encadrement, donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et mieux, un équivalent simple de f en $+\infty$.
- d) Montrer que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+ .

Exercice 3. Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t+x} dt$. Donner un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Suites d'intégrales

Exercice 4. Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$. Montrer que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, puis donner un D.A. à la précision $o(\frac{1}{n^2})$ de I_n .

Exercice 5. Soit $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(\theta) d\theta$.

- a) Trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+2} .
- b) Etudier la monotonie de (u_n) .
- c) Trouver un équivalent de (u_n) .

Sommes de Riemann

Exercice 6 (Sommes de Riemann "cachées" ou pas).

Calculer les limites des suites suivantes en retrouvant une somme de Riemann :

- a) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$,
- b) Soit $v_n = \sum_{k=1}^n E(\sqrt{k})$, donner un équivalent simple de (v_n)
- c) $w_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^n \tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$
- d) $p_n = \left(\frac{(2n)!}{n! n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 7. Soit $u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n^2 + k^2)}$. Déterminer un équivalent de (u_n) .

Exercice 8 (L'intégrale de Poisson, importante notamment en physique). Justifier que pour tout $t \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $I(t) = \int_0^{2\pi} \ln|t - e^{i\theta}| d\theta$ est bien définie. Calculer $I(t)$ avec des sommes de Riemann.

Exercice 9. Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, on note $\Delta_r = \{(k, l) \in \mathbb{N}^2, k^2 + l^2 \leq r^2\}$, qui est l'ensemble des points à coordonnées entières dans le quart de disque de rayon r qui se trouve dans le premier quadrant.

On note $N(r)$ le cardinal de Δ_r .

Le but de ce petit problème est de montrer que :

$$N(r) \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi r^2}{4} \quad (\dagger)$$

- a) Quelle interprétation donner à ce résultat, ou encore, que représente le membre de droite de $(\dagger)$?
- b) On suppose pour l'instant que r est un entier.
- (i) Donner une formule permettant de calculer $N(r)$ comme une somme dans ce cas.
- (ii) On considère $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ et on pose pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $S_r(f) = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} f\left(\frac{k}{r}\right)$.

Que sait-on de $S_r(f)$ quand r tend vers l'infini ?

- (iii) Montrer que $\frac{N(r)}{r^2} - S_r \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$.
- (iv) Conclure qu'on a $(\dagger)$ dans le cas des $r \in \mathbb{N}$.
- c) Cas des $r \in \mathbb{R}^+$.

En encadrant $N(r)$ par $N(E(r))$ et $N(E(r)+1)$, déduire du b) que la formule $(\dagger)$ est vraie les r réels.