

Uniforme continuité

Exercice 1 (Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité). a) Montrer que si f est U.C. sur I alors $\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}}, \forall (y_n) \in I^{\mathbb{N}}, |x_n - y_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

b) Montrer que la réciproque est vraie

Exercice 2. Donner un exemple d'une fonction continue bornée qui n'est pas U.C.

Exercice 3. Soit $(a, c) \in \mathbb{R}^2$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que si f est U.C. sur $]a, b]$ et $[b, c[$ alors elle est U.C. sur $]a, c[$.

Exercice 4. Montrer que toutes les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \leq 1$ sont uniformément continues sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5. Montrer que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et f admet une limite finie en $+\infty$, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6 (Fonctions hölderiennes). Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\exists \lambda > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|^\alpha$.

a) Montrer que si $\alpha > 1$ alors f est constante.

b) Montrer que f est uniformément continue.

c) Retrouver avec le résultat du b) que si $\alpha \in]0, 1]$ $x \mapsto x^\alpha$ est U.C. sur $\mathbb{R}^+$.

Fonctions continues par morceaux

Exercice 7 (Pour Lucie). a) Soit $s_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto [s_1(x)]$. La fonction f est-elle continue par morceaux sur $[-1, 1]$?

b) La composée de deux fonctions continues par morceaux est-elle toujours une fonction continue par morceaux?

Suites de fonctions, CVS/CVU

Exercice 8 (CVS-CVU). Soit $\alpha > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n : x \in [0, 1] \mapsto n^\alpha x^n (1 - x)$.

a) Montrer que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n = \max_{[0,1]} |f_n|$. Expliciter M_n .

c) En déduire, suivant la valeur de α , si (f_n) converge uniformément vers 0 ou pas.

d) Soit $I_n = \int_0^1 f_n$. Etudier la limite de I_n quand $n \rightarrow +\infty$. Commenter avec le résultat du c).

Exercice 9 (Avec des arctan, pour vous entraîner, on ne corrigera peut-être qu'un des deux.). Soit $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \text{Arctan}(\frac{x+n}{1+nx})$.

Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice 10 (Un théorème clef). a) Donner l'exemple d'une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$ qui CVS vers une fonction *discontinue* en au moins deux points de $[0, 1]$.

b) Montrer que si $I \subset \mathbb{R}$ et si (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge *uniformément* sur I vers une fonction f , alors f est continue.

Indication – Soit $\varepsilon > 0$.. on coupe en trois..

Fonctions définies par des intégrales... quand le x n'est pas dans les bornes

Exercice 11. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On pose $I(x) = \int_a^b f(t) \sin(xt) dt$. Montrer que I est continue sur $\mathbb{R}$, en montrant qu'elle est lipschitzienne.

Exercice 12 (Comment sortir le x de l'intégrale...). Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et g définie par $g(x) = \int_a^b f(x + t) \sin(t) dt$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer g' .

Exercice 13 (Un exemple a contrario, où on va mettre le x à l'intérieur de l'intégrale). Soit $k \in \mathbb{R}^{++}$ et $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction k -lipschitzienne.

On considère $F : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, & \text{si } x > 0, \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Montrer que F est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.