Exemples de produits scalaires

Exercice 1 (Incontournable)**.** Soit $E = \mathbb{R}[x]$ l'e.v. des fonctions polynomiales à coeff. réel. Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$ On définit pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\varphi(P, Q) = \int_a^b P(t)Q(t)dt$.

Démontrer que φ définit un p.s. sur E.

Exercice 2. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des nombres réels deux à deux distincts.

On pose pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$, $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k)Q(\alpha_k)$.

a) Vérifier qu'on a bien défini un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.

b) On va montrer qu'il existe $(L_0, \dots, L_n) \in E^{n+1}$ famille de polynômes telle que :

$$\forall\, (i, j) \in [\![0, n]\!]^2,\ L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j}$$

(i) Justifier que $(L_0, \dots, L_n)$ existe bien et qu'elle est unique.

(ii) Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une b.o.n. de E pour ce p.s.

(iii) Quand a-t-on déjà rencontré cette famille $(L_0, \dots, L_n)$?

Autour de ..

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^+)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$. Montrer que $I_{n+p}^2 \leq I_{2n}I_{2p}$.

Exercice 4. a) Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Donner la valeur minimum possible pour $\sum_{i=1}^n a_i^2$ et préciser quand elle est atteinte.

b) Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et soit $\mathcal{A} = \{f \in E, \int_0^1 f(t) = 1\}$. Déterminer le minimum de l'application $f \mapsto I(f) = \int_0^1 f(t)^2 dt$, quand f varie dans $\mathcal{A}$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^{+*})$. Déterminer le $\min\limits_{f \in \mathcal{F}} (\int_0^1 f)(\int_0^1 \frac{1}{f})$.

Exercice 6. Trouver les $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telles que $\int_0^1 f(t)^2 dt = 1$ et $\int_0^1 tf(t)dt = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ecriture en b.o.n.

Exercice 7. Soit E un e.v. euclidien. On suppose qu'il existe $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ tels que $\forall\, x \in E$, $\sum_{i=1}^n (x|e_i)^2 = \|x\|^2$.

a) Montrer que si on suppose que $\|e_i\| \geq 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

b) On ne suppose plus $\|e_i\| \geq 1$ mais on suppose que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. Montrer qu'on a la même conclusion.

c) Montrer que, si on n'a aucune des deux hypothèses du a) ou du b), il se peut que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ ne soit pas une b.o.n. de E.

Exercice 8. Soit $(E, (\,.\,|\,.\,))$ euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n. de E. Montrer que le nombre $\sum_{i=1}^n (f(e_i)|e_i)$ est indépendant du choix de la b.o.n. $\mathcal{B}$.

Exercice 9. Soit E un espace euclidien et $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$. Soit $f : E \to E$, $x \mapsto \sum_{i=1}^p (u_i|x)u_i$.

Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$, déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$. *Indication* – Pour $x \in \ker f$ que dire de $(f(x)|x)$?