Chap. G3 (fin) : changement de base de bases pour les endomorphismes, matrices semblables

II Matrices semblables et propriété de la trace (matrices carrées uniquement)

1) Matrices semblables

(i) Déf. : si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, on dit que B est semblable à A ssi $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{K}), B = P^{-1}AP$.

(ii) La relation *"être semblable"* est une relation d'équivalence. On notera (non stand.) $A \sim_s B$.
(iii) Si A et B sont semblables alors elles sont équivalentes, récip. fausse :
Toutes les matrices inversibles sont équivalentes *à I_n, la seule matrice semblable à I_n est* elle-même *!*

(iv) Deux matrices carrées sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme avec *"un seul"* changement de base !
(v) La relation de similitude (*plus fine*) est celle qui traduit vraiment *les prop. géom. des endomorphismes.*

Remarque sur les produits : $A' = P^{-1}AP$ et $B' = P^{-1}BP$ donne $A'B' = P^{-1}(AB)P$. Utile aussi pour A^n..

(vi) Exemple : M de rang r est *semblable* à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si, et seulement si, M est la matrice d'un *projecteur* de rang r. (N.B. M matrice de projecteur $\Leftrightarrow M^2 = M$).

2) Trace d'une matrice, d'un endomorphisme

(i) Déf. trace d'une matrice, $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
(ii) Prop. Tr est une forme linéaire de $M_n(K)$.
(iii) Prop. $\forall\, (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2, \quad \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
(iv) Cor. deux matrices semblables ont même trace. La récip. est fausse.

La trace donne une C.N. de similitude, pas une CNS.

(v) Cor-déf. de la trace d'un endomorphisme (*attention : pourquoi* $\mathrm{Tr}(f)$ *bien définie !*)
(vi) Exemple : trace d'un projecteur. Si p est un projecteur alors $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.
(vii) Ouverture sur les matrices de rotations en dimension 3.

3) Comment montrer que deux matrices sont *semblables* ?

La relation $A \sim_s B$ se montre en général *géométriquement* avec les A.L. can. ass.

Un premier exemple : comment montrer qu'une matrice donnée est semblable à une matrice diagonale, donnée :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est semblable à $D = \mathrm{diag}(2, 2, 1)$ et donner une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$.

Remarque : Il s'agit d'un exemple de *diagonalisation* : on montre que A est semblable à une matrice diagonale, ce qui simplifie bien l'étude de A... voir applications dans les exercices et problèmes.

Solution – *Méthode standard* Soit $\mathcal{B}$ la base can. de $E = \mathbb{R}^3$ et f can. assoc. à A.
On cherche $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = D$.
Les conditions sur e'_1, e'_2, e'_3 sont les suivantes : $f(e'_1) = 2e'_1$, de même $f(e'_2) = 2e'_2$ et $f(e'_3) = e'_3$.

L'essentiel : on cherche l'expression de e'_1, e'_2, e'_3 dans la base $\mathcal{B}$.
On travaille dans $\mathcal{B}$, et on utilise l'expression de f donnée par la matrice A pour traduire les conditions sur e'_1, e'_2, e'_3.

- On cherche donc e'_1 et e'_2 dans $\{v \in E,\ f(v) = 2v\}$.

Or pour $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a $f(v) = 2v$ ssi $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ce qui équivaut à :

$\begin{cases} 2x + y + z = 2x, \\ -2z = 2y \\ y + 3z = 2z \end{cases}$ i.e. à $y + z = 0$.

Donc on peut choisir e'_1, e'_2 deux vecteurs de base du plan d'équation $y = -z$, par exemple : $[e'_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $[e'_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• De même, on cherche e'_3 dans $\{v \in E,\ f(v) = v\}$.

Or pour $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a $f(v) = v$ ssi $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ce qui équivaut à :

$\begin{cases} 2x + y + z = x, \\ -2z = y \\ y + 3z = z \end{cases}$ i.e. à $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = -2z \end{cases}$

On choisit e'_3 un vecteur directeur de la droite ainsi définie p.ex. $[e'_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• On remarque que si on note $E_1 = \mathrm{Vect}(e'_1, e'_2)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(e'_3)$ on a pour $x \in E_1 \cap E_2 \Leftrightarrow f(x) = 2x$ et $f(x) = x$ ce qui force $x = 0$. Vue les dim. on a donc $E_1 \oplus E_2 = E$.

Ainsi $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E. Par construction $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{diag}(2, 2, 1)$.

En outre, par la formule de changement de base, on a $A = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} D P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, donc $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. □

Quelques questions se posent :
• Comment « trouver tout seul » une matrice diagonale candidate à être semblable à notre matrice A ?
• Est-ce que cela existe toujours ?
• A quoi cela sert-il de « diagonaliser » A ?

La réponse à ces questions dans le DM 15. Disons déjà que la recherche de matrices simples (diagonales ou triangulaires) à laquelle une matrice donnée est semblable et ses applications sera le coeur du cours d'algèbre linéaire de 2ème année.

Chap. H1 : espaces préhilbertiens, espaces euclidiens

I Déf. générale des produits scalaires

1) Formes bilinéaires : *Ici le corps de base est un corps $\mathbb{K}$ qcq.*

a) (i) **Déf. (application bilinéaire)** Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-e.v. On dit qu'une application $f : E \times F \to G$, $(u,v) \mapsto f(u,v)$ est *bilinéaire* ssi les deux conditions suivantes sont réalisées :

(1) Linéarité à gauche : pour tout $v \in F$, l'application $f(\cdot, v) : u \in E \mapsto f(u,v) \in G$ est linéaire,
(2) Linéarité à droite : pour tout $u \in E$, l'application $f(u,\cdot) : v \in F \mapsto f(u,v) \in G$ est linéaire.

(ii) Exemples déjà connus :

(iii) **Déf. (forme bilinéaire sur un espace vectoriel E).** Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Une *forme bilinéaire* sur E est une application bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$.

b) Exemple en dimension deux :
(i) écriture générale de toutes les F.B. dans une base de E de dim. 2.
$\varphi(x,y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$.
(ii) Codage de φ par une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
(iii) Calcul matriciel possible : $\varphi(x,y) = {}^tXAY$

c) Généralisation en dim. n : écriture $\varphi(x,y) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j}x_iy_j$ où $a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$.

d) Forme bilinéaire symétrique :
(i) Déf. φ est symétrique ssi $\forall\,(u,v) \in E^2$, $\varphi(u,v) = \varphi(v,u)$.
(ii) Caract. en dim. finie : φ est symétrique ssi $\varphi(e_i,e_j) = \varphi(e_j,e_i)$ où $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.
(iii) Ecriture dans une base en dim. 2 : $\varphi(x,y) = \alpha x_1y_1 + \beta(x_1y_2 + x_2y_1) + \gamma x_2y_2$.

2) La déf. abstraite des p.s. et premiers exemples

a) Déf. (p.s. sur E un $\mathbb{R}$-e.v. quelconque) : un p.s. sur E est une forme bilinéaire symétrique *définie-positive* i.e. vérifiant $\forall\, x \in E \smallsetminus \{0\}$, $\varphi(x,x) > 0$.

En pratique, on vérifie souvent "définie positive" avec les deux conditions : 1) φ est *positive* i.e. $\forall\, x \in E$, $\varphi(x,x) \geq 0$ et 2) $\forall\, x \in E$, $\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Notations possibles $(u|v)$ ou $< u, v >$ ou $< u|v >$ ou $\vec{u}.\vec{v}$ si on met des flèches aux vecteurs.

b) Premiers exemples :
(i) Dans E de dimension deux, où on a fixé une base $\mathcal{B}$, $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2$.
(ii) Généralisation : p.s. $(.|.)_{\mathcal{B}}$ associé à une base $\mathcal{B}$ dans E de dim. finie. $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_iy_i$
(iii) Exemple en dim. infinie : dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$: $(f,g) \mapsto \int_0^1 fg$.
(iv) Exemple matriciel : dans $M_{m,n}(\mathbb{R})$: produit scalaire associé à la base canonique $(E_{i,j})$.
Par déf. $\forall\,(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $(A|B) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j}b_{i,j}$.
Ecriture condensée : $(A|B) = \mathrm{Tr}(A\,{}^tB)$.

c) Etude systématique des p.s. en dim. deux :
(i) Une FBS est la donnée de φ : $(x,y) \mapsto ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2$.
(ii) Exemple : vérifier que $\varphi : (u,v) \mapsto 2x_1y_1 + 3(x_1y_2 + x_2y_1) + 7x_2y_2$ définit un p.s. sur $\mathbb{R}^2$
(iii) Etude générale sur la forme du (i) : Par la méthode de la forme canonique : φ est définie positive si, et seulement si, $a > 0$ et $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)) = ac - b^2 > 0$.
Ce résultat n'est pas au programme. L'essentiel : savoir faire la "forme canonique" sur les exemples.

II Notion d'orthogonalité et norme associées à un p.s. :

Dans tout ce qui suit, on a fixé un p.s. qu'on note $\varphi = (\,.\,|\,.\,)$, sur un $\mathbb{R}$-e.v. E.

Définition : Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire fixé $(\,.\,|\,.\,)$ s'appelle un *espace préhilbertien* et est noté comme un couple $(E, (\,.\,|\,.\,))$.

1) Orthogonalité

a) Vecteurs orthogonaux : $u \perp v$ (pour φ) ssi $\varphi(u,v) = 0$.
Rem. : Le seul vecteur orthogonal à lui-même est le vecteur nul.
Conséq. : Le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E est le vecteur nul.

b) Vecteur orthogonal à un s.e.v., déf. : $u \perp F \Leftrightarrow \forall\, v \in F,\ u\ \perp v$.
Caract. si $F = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_r)$, on a $u \perp F \Leftrightarrow \forall\, i \in [\![1, r]\!],\ u\ \perp v_i$.

c) Sous-espaces orthogonaux : $F \perp G \Leftrightarrow \forall\, u \in F,\ \forall v \in G, u \perp v$.
Rem. $F \perp G \Rightarrow F \cap G = \{0\}$.
En part. deux plans dans $\mathbb{R}^3$ ne seront jamais orthogonaux. En revanche, on a un notion, *plus faible* de *plans perpendiculaires, cf. pl.*

d) Prop. (*dém.*) Une famille de vecteurs tous non nuls 2 à 2 orthogonaux est libre.

2) Norme euclidienne associée à un p.s

a) Déf. générale : $N\ :\ E \to \mathbb{R}^+$ est une *norme* sur l'e.v. E ssi (3 propriétés) :
— $\forall\, v \in E,\ N(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$,
— (Homogénéité) $\forall\, \lambda \in\ \mathbb{R},\ \forall\, v \in E,\ N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$,
— (I.T.) $\forall\, (u,v) \in E^2,\ N(u+v)\ \le N(u) + N(v)$.

b) Prop. Soit $(\,.\,|\,.\,)$ un p.s. sur un e.v. E, alors l'application $N\ :\ v\ \mapsto \sqrt{(v|v)}$ est bien une norme, dite norme euclidienne associée au p.s. On note aussi $N(u) = ||u||$.

Pour vérifier l'I.T., on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz ci-dessous :

3) Inégalité de Cauchy-Schwarz

a) (i) Enoncé : pour $(\,.\,|\,.\,)$ un p.s. et $N\ :\ v\ \mapsto \sqrt{(v|v)}$ on a :

$$\forall\, (u,v) \in E^2,\ |(u|v)| \le N(u).N(v).$$

(ii) *Preuve 1* – Avec l'étude systématique des p.s. en dim. 2 du I. 2) c), appliquée au plan $\mathrm{Vect}(u,v)$ (si u, v non col.).

(iii) Conséq. de la preuve, *importante CNS d'égalité dans Cauchy-Schwarz* : u, v colinéaires.

(iv) *Preuve 2* – Sans faire référence au résultat du I. 2. c), on introduit $\varphi(t) = (u + tv | u + tv)$, *polynôme du second degré qui garde un signe constant :* $\Delta \le 0$

b) (i) Application de C-Schwarz à la preuve de l'I.T.
(ii) *Importante C.N.S. d'égalité dans l'I.T.* : u et v *positivement* colinéaires ($\neq$ C.Schwarz).

c) Traduction de Cauchy-Schwarz pour le p.s. can de $\mathbb{R}^n$, pour le p.s. $\int_0^1$.
Penser à l'homogénéité des deux membres si on remplace v par λv.

4) Manipulations sur $||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2$:

L'essentiel : la norme au carré est plus manipulable que la norme : c'est le carré scalaire.

a) Développement de la norme au carré d'une somme :

$$\forall\, (u,v) \in E^2,\ ||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2(u|v).$$

Appl. écriture du p.s. en fonction de la norme : $(u|v) = \frac{1}{2}(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2)$.

b) Egalité de Pythagore : si $u \perp v$, $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

c) Egalité du parallélogramme : $\forall\, (u,v) \in E^2$, $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$.

III Propriétés différentes en dimension finie et en dimension infinie :

1) Distinction de terminologie

Déf. : un espace vectoriel préhilbertien de dimension finie s'appelle un *e.v. euclidien.*

2) Bases orthonormées (dim. finie)

a) (i) Déf. u est un vecteur *unitaire* ou *normé* ssi $\|u\| = 1$.

(ii) Déf. $(u_1, \dots, u_r)$ est une famille orthogonale ssi $\forall\,(i,j) \in [\![1,r]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow u_i \perp u_j$.

(iii) Déf. $(v_1, \dots, v_r)$ est une famille orthonormée (ou orthonormale) ssi $\forall\,(i,j) \in [\![1,r]\!]^2$, $(v_i|v_j) = \delta_{i,j}$.

(iv) On a vu qu'une famille orthonormée est toujours libre. Une b.o.n. est une famille o.n. qui est une base.

b) Forme du p.s. dans une b.o.n. :

(i) Caract. Soit $(E, (\,.\,,\,.\,))$ un espace euclidien. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors :

$\mathcal{B}$ est o.n. si, et seulement si, $\forall\,(u,v) \in E^2$, $(u|v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (coord. dans $\mathcal{B}$).

(ii) Ainsi, si on fixe une base $\mathcal{B}$, on sait que pour le p.s. $(.|.)_{\mathcal{B}}$ déf. plus haut, c'est une b.o.n.

(iii) Question : si on se donne "autrement" un p.s sur E de dim. finie, peut-on toujours trouver une base $\mathcal{B}$ qui est o.n. pour φ i.e. tel que $\varphi = (.|.)_{\mathcal{B}}$?

Exemple 1 : peut-on trouver une b.o.n. pour le p.s. défini sur $\mathbb{R}^2$ par :
$\varphi : (u,v) \mapsto 2x_1y_1 + 3(x_1y_2 + x_2y_1) + 7x_2y_2$?

Exemple 2 : montrer que dans $E = \mathbb{R}_2[x]$, $(f,g) \mapsto \int_0^1 fg$ définit un p.s. et trouver une b.o.n.

Réponse générale : oui, obtenu comme suit :

c) Orthogonalisation de Gram-Schmidt :

- But : obtenir à partir d'une famille libre $(u_1, \dots, u_d)$ qcq une famille orthogonale $(v_1, \dots, v_d)$ avec la propriété que pour tout $i \in [\![1,d]\!]$, $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_i) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_i)$.
- Mise en oeuvre : $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2 + \lambda v_1$ avec λ tel que $(v_2|v_1) = 0$ etc.
- Si on veut ensuite une famille orthonormée, on remplace les v_i par $\dfrac{v_i}{\|v_i\|}$.

d) Mise en oeuvre sur les deux exemples du b) (iii)

e) Conséquences théorique du procédé de Gram-Schmidt :

(i) Théorème : dans un espace euclidien, on a toujours des bases orthonormées.

(ii) Mieux, on peut compléter toute famille orthonormale en une base orthonormale (T.B.I. + Gram Schmidt).

f) Intérêt de posséder des bases orthonormées : écriture sympa du p.s. !

(i) On a vu que, quel que soit le p.s. $(\,.\,|\,.\,)$, avec les coordonnées dans $\mathcal{B}$ base orthonormée E il s'écrit toujours $(u|v) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

(ii) De même $\|u\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ et $d(u,v) = \|u - v\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

(iii) Obtention des coordonnées par p.s. : si $(e_1, \dots, e_n)$ b.o.n, $\forall\, v \in E$, $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (v|e_i) e_i$

Autrement dit : $(v|e_i)$ donne la composante du vecteur v sur e_i.

(iv) Appl. aux endomorphismes : dans $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ b.o.n. si $f \in \mathcal{L}(E)$ et si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors $a_{i,j} = (e_i|f(e_j))$.

3) Orthogonal d'un sous-espace (dim. qcq/dim. finie)

a) Orthogonal d'une partie quelconque d'un e.v. E muni d'un p.s. :

(i) Déf. Soit $A \subset E$, on définit $A^\perp = \{v \in E,\ \forall\, a \in A, v \perp a\}$.

(ii) Prop. Si $A \subset B$ alors $A^\perp$ $\quad$ $B^\perp$.

(iii) Si A est une partie quelconque, alors $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$.

En pratique, dans la suite, on s'intéresse essentiellement aux orthogonaux de s.e.v. mais par le (iii), ce n'est pas restrictif...

b) Prop. générales : (i) Prop.$_1$: G orthogonal à F ssi $G \subset F^\perp$.
(ii) Prop.$_2$: $F^\perp$ est un s.e.v. Par prop.$_1$, c'est le plus grand s.e.v. orthogonal à F.
c) Propriété spécifique à la dim. finie :
Si E est de dim. finie, alors $F \oplus F^\perp = E$.
Dans ce cas $F^\perp$ s'appelle le supplémentaire orthogonal de F.
d) Contre-exemple en dim. infinie : ex. planche.
e) Preuve de la prop. en dim. finie et pratique : $F^\perp$ s'obtient en complétant une b.o.n. de F en une b.o.n. de E.
f) Prop. (*savoir redém en dim. quelconque*) Si F admet dans E un supplémentaire G tel que $F \perp G$ alors $G = F^\perp$.
Autrement dit : si $E = F \oplus G$ et $F \perp G$ alors $G = F^\perp$.
g) Exercice important (cf. pl.) écriture de $(F+G)^\perp$ et de $(F \cap G)^\perp$.

4) Projection orthogonale dans E de dim. finie

a) (i) Remarque préliminaire : si $E = F \oplus G$ et $F \perp G$ alors $G = F^\perp$.
(ii) Déf. si E est un espace euclidien et si F est un s.e.v. de E alors on a $E = F \oplus F^\perp$ et on appelle projecteur orthogonal sur F le projecteur sur F de noyau $F^\perp$. On le notera p_F.

b) Caractérisation : p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, il existe une b.o.n. de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
c) Prop. $p_F(v)$ est l'unique vecteur w de F tel que $v - w$ est orthogonal à F.
d) Prop. (Pythagore) :
(i) Déf. $d(v,F) = \inf\{d(v,w),\ w \in F\} = \inf\limits_{w \in F} ||v-w||$.
(ii) Théorème : $\forall\, v \in E, \exists\,!w_0 \in F,\ d(v,F) = ||v - w_0||$ et $w_0 = p_F(v)$.
Autrement $||v - p_F(v)||$ réalise le $\min\{||v-w||,\ w \in F\}$.

e) Calcul pratique du projeté orthogonal :
(i) Si $(e_1,\dots,e_d)$ b.o.n. de F alors $p_F(v) = \sum\limits_{i=1}^{d} (v|e_i)e_i$.
(ii) Si $(u_1,\dots,u_d)$ est une base non orthonormée, on calcule $p_F(v) = \sum_{i=1}^d \lambda_i u_i$ grâce aux d conditions $(v|u_i) = (p_F(v)|u_i)$.

f) Cas particuliers utiles :
(i) Projection orthogonale sur une droite $D = \mathbb{R}u$: $\forall\, x \in E$, $p_D(x) = \dfrac{(x|u)}{||u||^2}u$.
(ii) Projection orthogonale sur un hyperplan H : on considère un vecteur normal u, $p_H(x) = x - \dfrac{(x|u)}{||u||^2}u$ par $p_H = \mathrm{id} - p_{H^\perp}$.

5) Lemme de représentation de Riesz et retour sur la théorie des équations

a) Prop (Riesz) : Soit $E, (\ ,\ )$ un espace euclidien et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire.
Alors il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que $\varphi = (u|\square)$.
Preuve immédiate en coordonnées !.

b) Application à la théorie des équations (comparer au G1 et G3... une troisième preuve !) :
Si on se donne F un s.e.v. de $E = \mathbb{R}^n$ définie par m F.L. $\varphi_1(x) = \cdots = \varphi_m(x) = 0$.
Alors en écrivant $\varphi_i(x) = (u_i|x)$, F s'interprète comme $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_m)^\perp$.
On retrouve que $\dim(F) = n - \dim \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_m) = n - \mathrm{rg}(\varphi_1,\dots,\varphi_m)$.

C'est la théorie de l'orthogonalité des vecteurs qui résout ici ce problème de la dimension.

c) Cas des matrices :
(i) Toute forme linéaire $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, s'écrit $\varphi = \mathrm{Tr}(A\square)$.
(ii) Ce résultat n'est cependant par limité au cas réel : pour un corps $\mathbb{K}$ quelconque, on a :

$$\forall\, A \in M_n(\mathbb{K}),\ \forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$$