

Chap. G2 : Algèbre des matrices (fin)

Tout le début du G2 sur l'algèbre des matrices est à revoir avec en plus :

5) Polynôme appliqué à une matrice carrée (resp. un endomorphisme) :

a) **Définition** : Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} pour l'instant (cf. chap. K pour plus général), pour toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{K}[x]$, $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ et toute matrice carrée $M \in M_n(\mathbb{K})$ on peut définir

la matrice $P(M) := \sum_{k=0}^n a_k M^k$.

b) Prop. cruciale :

pour chaque matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$, l'application $ev_M : \mathbb{K}[x] \rightarrow M_n(\mathbb{K})$, $P \mapsto P(M)$ est un morphisme d'algèbres.

Signification concrète : toutes les formules vues pour les polynômes donnent des formules pour les matrices. Attention bien penser à remplacer 1 par I .

Exemple : si $aX^2 + bX + c = a(X - r_1)(X - r_2)$ alors $aM^2 + bM + cI = a(M - r_1I)(M - r_2I)$.

c) Variante en remplaçant les matrices par les endo. d'un \mathbb{K} -e.v. (même de dim infinie).

On définit de même si $u \in \mathcal{L}(E)$, $P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k$ avec les mêmes prop.

Sur l'exemple ci-dessus : $au^2 + bu + c = a(u - r_1 \text{id}) \circ (u - r_2 \text{id})$.

6) Transposée (d'une matrice rectangulaire quelconque) :

a) Définition :

si $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ alors ${}^tA \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ est définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket, \quad ({}^tA)(i, j) = A(j, i).$$

Notation alternative qui devient de plus en plus à la mode (attention à la police) :

on note aussi A^\top pour tA

Remarque : Les lignes de tA sont les colonnes de A ... écrites en lignes.

b) Linéarité, « involutivité »

(i) Prop. L'application $A \mapsto {}^tA$ est linéaire

(ii) Prop. : $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), {}^t({}^tA) = A$.

(iii) Conséq. : La transposition est un isomorphisme d'e.v. de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ dans $M_{n,m}(\mathbb{K})$.

c) Transposée d'un produit :

(i) Prop. $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \forall B \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

(ii) Corollaire : si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible alors tA est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

d) Matrices (carrées) symétriques ou antisymétriques :

(i) Déf. une matrice (carrée) A est symétrique ssi ${}^tA = A$ et antisymétrique ssi ${}^tA = -A$.

On note $S_n(\mathbb{K})$, resp. $A_n(\mathbb{K})$ l'e.v. des matrices symétriques, resp. antisymétriques.

(ii) Prop. décomposition : $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$.

II Calcul d'inverse de matrices, systèmes linéaires inversibles, opérations élémentaires

0) Remarque cruciale (déjà faite au § I)

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et X, Y des matrices colonnes dans $M_{n,1}(K)$.
 Vue l'équivalence $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$, calculer A^{-1} équivaut à résoudre un système linéaire.

On a déjà dit depuis le chapitre D que *la méthode générale de résolution d'un système linéaire est le pivot*.

Cependant, avant de reprendre plus en profondeur cette méthode du pivot, on va donner des autres méthodes plus particulières.

1) Calcul d'inverses dans (de nombreux) cas particuliers

a) Cas des matrices 2×2 : traduction matricielle des formules de Cramer.

Retenir $A^{-1} = (1/\det(A)) \times$ la matrice où on permute les deux éléments diagonaux et on met des $-$ aux éléments non diagonaux.

b) Cas des matrices "avec beaucoup de symétrie" :

il est intéressant de regarder $L_1 + \dots + L_n$

Exple : calculer l'inverse de $A = (a_{i,j})$ où $a_{i,j} = 1 - \delta_{i,j}$.

c) Utilisation de l'algèbre dans $M_n(\mathbb{K})$:

(i) On peut utiliser des « identités remarquables » par exemple pour les matrices : $I - N$ avec N nilpotente.

Identité remarquable : $I - N^r = (I - N) \times (I + N + \dots + N^{r-1})$ car I et N commutent.

(ii) On peut utiliser un polynôme annulateur :

Déf. : On dit qu'un polynôme $P : X \mapsto \sum_{k=0}^m a_k X^k$ est *annulateur de M* ssi $P(M) = 0$.

(iii) Application au calcul de l'inverse : si on possède un polynôme annulateur avec un coefficient $a_0 \neq 0$.

(iv) Pourquoi une matrice admet-elle toujours un polynôme annulateur non trivial ?

(v) CNS d'inversibilité : si $P : X \mapsto \sum_{k=0}^m a_k X^k$ est *annulateur, non nul, de M , de degré minimal* alors M est inversible si, et seulement si, $a_0 \neq 0$.

d) Cas où on est dans une petite sous-algèbres de $M_n(\mathbb{K})$: reprise de l'exemple du b) en écrivant $A = E - I \in \text{Vect}(I, E)$. On montre que $A^{-1} \in \text{Vect}(I, E)$.

Cela vient du fait que $\mathcal{A} = \text{Vect}(I, E)$ est une *sous-algèbre* de $M_n(\mathbb{K})$.

e) Propriété générale des sous-algèbres de $M_n(\mathbb{K})$ (H.P. à réexpliquer à chaque fois) :

si $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre et $A \in \mathcal{A}$ admet un inverse A^{-1} dans $M_n(\mathbb{K})$ alors $A^{-1} \in \mathcal{A}$.

Cas particulier important : si $A \in TS_n(\mathbb{K})$ (resp. $TI_n(\mathbb{K})$) est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$ alors son inverse A^{-1} est dans $TS_n(\mathbb{K})$ (resp. $TI_n(\mathbb{K})$).

Démonstration : (M1) Avec un polynôme annulateur.

(M2) En considérant la multiplication $m_A : M \in \mathcal{A} \mapsto AM \in \mathcal{A}$. Pourquoi sait-on qu'elle est injective et pourquoi la surjectivité de m_A donne la conclusion ? □

f) Utilisation du lien avec les endomorphismes : avec l'exemple d'une matrice de permutation ou de la matrice de Pascal.

2) Pivot de Gauss et traduction matricielle des opérations sur lignes et colonnes

a) Opération sur les colonnes : multiplication à droite.

(i) Rappel des trois opérations "autorisées" dans la méthode du pivot de Gauss (ici sur les colonnes) :

- Echange de colonne, notation : $C_i \leftrightarrow C_j$,
- multiplication d'une colonne par un scalaire non nul, $C_i \leftarrow \alpha C_i$,
- transvection $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \neq 0$.

(ii) **Prop. :** on se place dans $M_{m,n}(\mathbb{K})$. Chacune des trois opérations de pivot sur les colonnes (C_1, \dots, C_n) d'une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ peut être obtenue en multipliant A à droite par une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ qui ne dépend pas de A , ni même du nombre m de lignes de A , mais seulement de l'opération à effectuer sur (C_1, \dots, C_n) .

Il est alors très facile de trouver la matrice P , en pensant que pour $A = I_n$, la matrice $AP = P$ sera la matrice obtenue à partir de I_n par cette opération. On va détailler ci-dessous :

- Pour $C_i \leftrightarrow C_j$: multiplication à droite par $P = P_{i,j}$ qui est simplement la matrice obtenue en permutant C_i et C_j dans I_n .
- Pour $C_i \leftarrow \alpha C_i$: multiplication à droite par $P = \text{diag}(1, \dots, \alpha, \dots, 1)$, avec α à la i -ème place, appelée matrice de dilatation.
- Ajout à la colonne C_i d'un multiple de C_j , notation $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$. multiplication à droite par la matrice $P = T_{j,i,\lambda} = I_n + \lambda E_{j,i}$, appelée matrice de transvection.
Remarque : $T_{j,i,\lambda}$ est inversible d'inverse $T_{j,i,-\lambda}$.

La seule chose à retenir est qu'on multiplie à droite. Pour avoir la matrice codant une opération, il suffit d'appliquer cette opération à la matrice I_n .

(iii) *Dém. de la prop. :* On note $A' = (C'_1, \dots, C'_n)$ la matrice obtenue après modification de $A = (C_1, \dots, C_n)$. On note f' et f les A.L. can. associée à A' et A .

Alors $f' = f \circ \varphi$ où $\varphi \in GL(\mathbb{K}^n)$ associe aux vecteurs e_1, \dots, e_n les vecteurs e'_1, \dots, e'_n obtenus avec la même opération. □

b) Opérations analogues sur les lignes : multiplication à gauche.

Prop. : on se place dans $M_{m,n}(\mathbb{K})$. Chacune des trois opérations de pivot sur les colonnes (L_1, \dots, L_m) d'une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ peut être obtenue en multipliant A à gauche par une matrice $Q \in GL_m(\mathbb{K})$ qui ne dépend pas de A , ni même du nombre m de lignes de A , mais seulement de l'opération à effectuer sur (L_1, \dots, L_m) .

Preuve : preuve avec le a) appliqué à ${}^t A$.

3) Application du pivot matriciel à l'inversion de matrices

Attention : utilisation du pivot seulement sur les Lignes (Ou seulement sur les colonnes !)

a) Méthode : présentation sur deux colonnes : au départ A à gauche, I à droite, à chaque étape, on répercute les opérations sur les lignes des deux côtés, à l'arrivée I à gauche et A^{-1} à droite.

b) Mise en oeuvre de la méthode du pivot sur les lignes : on peut voir le pivot en deux temps. Si le pivot est l'entrée $(1, 1)$ on commence par créer des zéros sous la diagonale en retranchant à chaque ligne une C.L. de lignes inférieures. Puis, quand la matrice est TS, on utilise au contraire les lignes du bas (les plus simples), pour mettre des zéros au dessus de la diagonale

Un exemple : inverser $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Résultat : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1 & -4/3 \\ -1/6 & -1/2 & -5/6 \end{pmatrix}$.

c) Ce qui valide la méthode : mêmes opérations signifie multiplication par la même matrice.

d) Attention : si on veut agir à la fois sur les lignes et le colonnes : on obtient $I = T_1 A T_2$ à gauche et $T_1 T_2$ à droite!

Chap. G3 : changement de base, matrices équivalentes, semblables**I Changement de bases et matrices équivalentes****1) Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire****a) Matrice de passage**(i) Déf $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice dont les colonnes sont les coord. des vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} .(ii) Interprét. géom. $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{id}_E)$ (écriture non usuelle pour id_E endomorphisme).Conséquence : la matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est inversible, d'inverse $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$.(iii) Changement de base pour les vecteurs : si $[x]_{\mathcal{B}} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et $[x]_{\mathcal{B}'} = X'$ alors :

$$X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X'.$$

(iv) Moralité : si \mathcal{B}' (nouvelle base) est donnée en fonction de \mathcal{B} (ancienne base), alors la matrice de passage qui est donnée sans calcul, i.e. $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, ne permet pas de calculer les coordonnées d'un x dans la nouvelle base. Il faut inverser $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$. Exemple de calcul en dim. 2.(v) Preuve de la formule du (iii) : simplement $x = \text{id}_E(x)$ avec $\text{id}_E : (E, \mathcal{B}') \rightarrow (E, \mathcal{B})$.**b) Formule de changement de base pour les application linéaires**(i) Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec notations usuelles on a la relation :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}', \mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$$

(ii) Preuve par la composition des applications :

$$\begin{array}{ccc}
 (E, \mathcal{B}) & \xrightarrow{f} & (F, \mathcal{C}) \\
 \uparrow \text{id}_E & & \downarrow \text{id}_F \\
 (E, \mathcal{B}') & \xrightarrow{f} & (F, \mathcal{C}')
 \end{array}$$

(ii) En pratique, si \mathcal{B} et \mathcal{C} sont les anciennes bases, et \mathcal{B}' et \mathcal{C}' les nouvelles exprimées en fonctions des anciennes, alors sont données sans calculs les matrices $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}$ et la relation du (i) devient :

$$M' = Q^{-1} M P.$$

c) Cas des endomorphismes(i) Relation : $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ (ii) Avec la même convention qu'au b) (ii), $M' = P^{-1} M P$. Ceci sera approfondi au G3 (semaine prochaine).**2) Matrices équivalentes et classification par le rang****a) Matrices équivalentes :**

(i) Déf. Pour $(M, N) \in M_{m,n}(\mathbb{K})^2$, on dit que N est *équivalente* à M ssi $\exists (Q, P) \in GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}), N = QMP$.

(ii) Prop. : La relation du (i) est une *relation d'équivalence* : R.S.T.(iii) Rem. Pour les calculs de rang d'une famille de vecteurs, on avait déjà introduit la r-équivalence (équivalence à droite) : M et N sont r-équivalentes ssi il existe un $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $M = NP$.De même on peut introduire la l-équivalence : $M = QN$.

L'équivalence du (i), moins exigeante, pourrait s'appeler RL-équivalence.

N.B. : *Toutes ces terminologies r-équivalences, l-équivalence, et rl-équivalences ne sont hélas pas dans la lettre du programme. Le seul mot figurant au programme est matrices équivalentes, ce qui désigne la rl-équivalence.*

(iv) Caract. géométrique : Deux matrices sont équivalentes ssi elles représentent la même A.L. à deux changements de bases près : un au départ et un à l'arrivée.

Énoncé précis : Soit M et M' dans $M_{m,n}(\mathbb{K})$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ tel que $M = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f)$ où \mathcal{B}, \mathcal{C} sont les bases can. resp. Alors :

M et M' sont équivalentes si, et seulement si, il existe une base \mathcal{B}' de \mathbb{K}^n et une base \mathcal{C}' de \mathbb{K}^m telles que $M' = \text{Mat}_{\mathcal{C}', \mathcal{B}'}(f)$.

b) Petite excursion sur la r -équivalence et la l -équivalence :

(i) Convention : pour $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, on désigne par $\ker(M)$ et $\text{Im}(M)$ le noyau et l'image de l'application lin. can. associée à M qu'on peut voir aussi comme l'appl. $X \mapsto M.X$.

(ii) Prop. : deux matrices r -équivalentes ont même image.

Deux matrices l -équivalentes ont même noyau.

(iii) En particulier si deux matrices r -équivalentes ont même rang, et c'est aussi vrai pour deux matrices l -équivalentes.

c) Rang d'une matrice (rappels et compléments)

(i) Prop. déf. du rang d'une matrice : Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

(1) $\text{rg}(C_1, \dots, C_n)$ (rang de la famille des col. de A)

On peut définir $\text{rg}(A)$ de manière équivalente comme : (2) $\text{rg}(f)$ où $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ est l'A.L. can. ass. à f ,

(3) $\text{rg}(f)$, $\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f)$

(ii) Propriété : deux matrices équivalentes ont même rang.

Deux preuves : (1) Preuve géométrique : Avec le a) (iv).

(2) Preuve en décomposant via la r et la l équivalence, qui toutes deux conservent (plus que) le rang.

(iii) Prop. (rappel) si $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ alors $\text{rg}(A) \leq \min(m, n)$.

d) Classification par le rang : théorème de réduction par équivalence, pv. géom.

(i) **Théorème géométrique : réduction par deux changements de bases** $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r , si et seulement si, il existe un choix de base \mathcal{B}, \mathcal{C} de E, F tel que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) **Reformulation matricielle : théorème de réduction par équivalence**

si $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, A est de rang r si, et seulement si, elle est *équivalente* à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Le sens \Leftarrow est évident.

(iv) Corollaire de la prop. (transitivité) deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang.

Pour les exercices du type " A et B sont elles équivalentes?", regarder simplement le rang

(v) Preuve du (i) : C.N. sur les vecteurs de la base recherchée... puis on ajuste à l'arrivée.

e) Obtention de la même réduction par la méthode du pivot matriciel

(i) Idée : si on reprend la méthode du pivot matriciel qu'on a appliquée aux matrices inversibles au II 3) du G2, et qu'on l'applique à une matrice rectangulaire quelconque, mais cette fois en agissant d'abord sur les lignes, mais aussi ensuite sur les colonnes (ou l'inverse!) on arrive aussi à la matrice :

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Résultat vu seulement sur un exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \frac{1}{2} \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Par pivot sur les lignes (de haut en bas puis de bas en haut), on arrive à $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(Cette réduction à elle seule est intéressante et implémentée dans le module `linalg` de `numpy`.)

Par pivot sur les colonnes : on se ramène alors à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) En “répercutant” toutes les opérations sur les lignes dans une matrice qui vaut I_m au départ et celles sur les colonnes dans une matrice qui vaut I_n au départ, on obtient les deux matrices Q et P^{-1} telles que :

$$QAP^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Applications : propriétés du rang

a) Rang de la matrice transposée

(i) *Théorème* Pour tout $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, on a $\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A)$.

(ii) Reformulation : rang des lignes égale au rang des colonnes !

(iii) Preuve avec le thm. de réd. par équivalence.

b) Conséquences importantes sur les systèmes d'équations linéaires

(i) Traduction matricielle d'un système linéaire : Si $E = \mathbb{K}^n$ et qu'on considère un s.e.v. F défini par m équations $\varphi_1(x) = \dots = \varphi_m(x) = 0$, on peut écrire en identifiant \mathbb{K}^n à $M_{n,1}(\mathbb{K})$, $X \in F \Leftrightarrow AX = 0$.

(ii) En notant $a \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ l'endo. can. associé à A , $F = \ker(a)$ et par théorème du rang $\dim(F) = n - \text{rg}(a) = n - \text{rg}(A) = n - \text{rg}({}^tA) = n - \text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$.

Scholie : On vient de démontrer différemment le résultat donné fin du G1 : m équations indépendantes définissent un s.e.v. de dim. $n - m$.

N.B. A l'inverse, on peut utiliser le résultat du G1 pour démontrer le théorème sur le rang de la transposée.

c) Rang des matrices extraites et caractérisation du rang par les matrices extraites

(i) **Déf. (matrice extraite)** Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On appellera sous-matrice de A obtenue avec les lignes L_{i_1}, \dots, L_{i_p} et les colonnes C_{j_1}, \dots, C_{j_q} (où $i_1 < \dots < i_p$ sont dans $\llbracket 1, m \rrbracket$ et $j_1 < \dots < j_q$ sont dans $\llbracket 1, n \rrbracket$) la matrice $A' = (a'_{k,l}) \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ définie par $\forall (k,l) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, on a l'égalité d'entrées : $a'_{k,l} = a_{i_k, j_l}$.

(ii) Prop. Si A' est une sous-matrice de A alors $\text{rg}(A') \leq \text{rg}(A)$.

(iii) Prop. si $\text{rg}(A) = r$ il existe une sous-matrice A' de A qui est une matrice carrée de taille r inversible.

(iv) **Caract. du rang par les matrices extraites :** le rang d'une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ est le plus grand entier r tel qu'il existe une sous-matrice de A carrée de taille r inversible.