Solutions pour le paragraphe 3 du T.P. 12

3 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$:

3.1 Représentation des itérées d'une fonction $f \; : x \mapsto x^2 + c$

Notation : Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{\circ n} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois } f}$.

On a vu au chapitre sur les suites récurrentes que même pour une simple fonction polynomiale du second degré f, les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ donnent des comportements assez riches... en fait la richesse (et la complexité) des ces suites va bien au delà des exemples que nous avons étudiés.

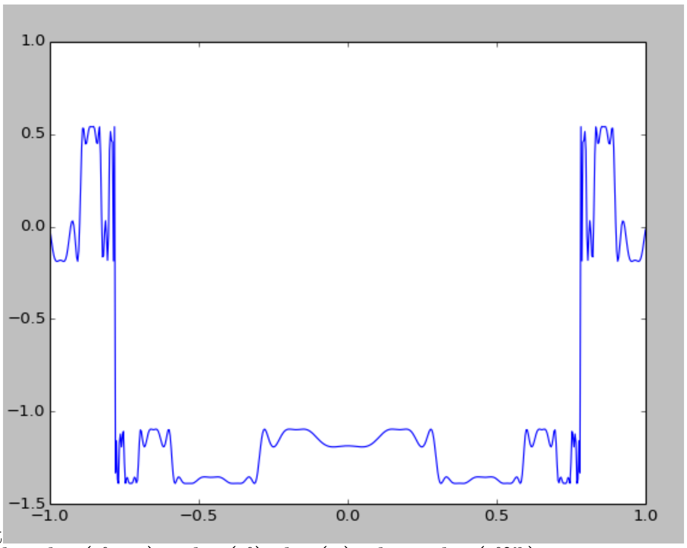
Une première façon de comprendre cette complexité est de tracer à quoi ressemble $f^{\circ n}$.

Exercice : Tracez le graphe de $f^{\circ n}$ pour $f : x \mapsto x^2 + c$ pour $c = -1,39$ et $n = 6, 10, 15$, notamment pour $x \in [-1, 1]$. Remarque : quel est le degré de cette fonction polynomiale ?

Solution 3.1

Avec le code suivant,
on obtient le graphe à droite

```
c=-1.39
def f(x):
    return x**2+c
def iteration(f,n,x):
    for i in range(n):
        x=f(x)
    return x
x=pl.linspace(-1,1,300)
n=15 # on peut changer.
y=iteration(f,n,x)
pl.plot(x,y)
```



Remarque : Pour deux fonctions polynomiales $\deg(f \circ g) = \deg(f).\deg(g)$, donc $\deg(f^{\circ n}) = 2^n$. Pour $n = 15$,on a donc tracé le graphe d'une fonction de degré 2^{15}, et c'est compliqué !

Cette courbe représente donc pour chaque valeur de u_0 possible en abscisse, la valeur de u_{15} en ordonnée. On comprend que la dépendance de u_{15} par rapport à u_0 est subtile !

3.2 Histoire d'un germe

Pour chaque point x_0 (appelé *germe*) on considère la suite (x_n) définie par ce x_0 et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

Avec la notation du paragraphe précédent, on a $x_n = f^{\circ n}(x_0)$.

Pour avoir une représentation graphique de la suite (x_n) on va tracer les points (n, x_n) pour $n \in \mathbb{N}$ (bien sûr en fait pour une partie de $\mathbb{N}$!). Ce graphe sera appelé *l'histoire du point* x_0.

On choisit ici $x_0 = -1$ et toujours $f : x \mapsto x^2 + c$. Tracez les points (n, x_n) dans les différents cas suivants :

a) si $c = -1$. Justifier le résultat visible sur le tracé.

b) si $c = -1,3$. Commentez le résultat. Regardez des valeurs numériques plus précises pour préciser votre analyse : a-t-on oui ou non un comportement périodique A.P.C.R. ?

c) si $c = -1,8$. Commentez ?

Solution 3.2 On peut utiliser un code comme :

```
x0=-0.8
c=-1.3
def f(x):
    return x**2+c
L=[x0]
n=50
for i in range(1,n):
    L.append(f(L[-1]))
pl.clf()
pl.plot(L,"r*")
```

a) Avec $c = -1$, on voit immédiatement que la suite (x_n) est périodique de période 2, ce qui se prouve de manière immédiate par le calcul $x_0 = -1$ donne $x_1 = (-1)^2 - 1 = 0$ puis $x_2 = 0^2 - 1 = -1$.

b) Avec $c = -1.3$:
Au début le comportement n'est pas régulier mais assez vite, on a l'impression d'arriver à un comportement périodique de période 4. En fait, si on examine *les valeurs* prises par x_n on s'aperçoit que les quatre suites extraites (x_{4n}), (x_{4n+1}), (x_{4n+2}), (x_{4n+3}) ne sont pas rigoureusement constantes (pendant un certain temps en tout cas), mais *tendent* chacune vers une limite. Les famille des quatre limite forme pour la fonction f une orbite périodique formée de quatre éléments, qui est une *orbite périodique attractive.*

c) si $c = -1,8$. Le comportement semble chaotique.

3.3 Etude mathématique précise : des calculs faciles au début

On considère toujours $f_c : x \mapsto x^2 + c$.

a) Déterminer la CNS sur c pour que f_c ait un point fixe (réel !). Bien sûr cela se fait à la main, avec papier crayon, puisqu'il s'agit de pouvoir résoudre une équation du second degré. On suppose désormais cette condition réalisée.

b) Déterminer la CNS sur c pour qu'un de ces deux points fixes soit *attractif.*

c) Déterminer la CNS sur c pour qu'en outre f_c ait des points périodiques de période 2 i.e. il existe des $x \in \mathbb{R}$ tels que $(f \circ f)(x) = x$ et $f(x) \neq x$.

Solution 3.3 a) On considère $\varphi_c : x \mapsto f(x) - x = x^2 - x + c$. La fonction f_c a (au moins) un point fixe réel ssi φ_c a un zéro réel ssi $\Delta = 1 - 4c \geq 0$ donc ssi $\boxed{c \leq \frac{1}{4}}$.

Dans ce cas les deux points fixes sont $x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{1-4c}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1-4c}}{2}$.

b) On a défini un point fixe x_0 de f_c est attractif par la condition $|f_c'(x_0)| < 1$. Or ici $f_c'(x) = 2x$ pour tout x. Donc : $f_c'(x_1) = 1 + \sqrt{1-4c}$ et $f_c'(x_2) = 1 - \sqrt{1-4c}$.
Ainsi x_1 n'est jamais attractif. En revanche, x_2 est attractif ssi $1 - \sqrt{1-4c} > -1$ Cette condition équivaut à $2 > \sqrt{1-4c}$ ou encore $4 > 1 - 4c$ ou encore $c > -3/4$.
Dans le cas $c = 1/4$, $x_2 = x_1$ n'est pas non plus attractif.

Conclusion : Donc f_c admet un point fixe attractif ssi $c \in]-3/4, 1/4[$.

c) On considère $\psi(x) = (f \circ f)(x) - x$. Les zéros de ψ sont les points x tels que $f(f(x)) = x$. Ils représentent les points fixes de f et les points périodiques de période 2. Ainsi (idem ex. pl.) on peut factoriser $\psi(x)$ par $f(x) - x$ (lemme de factorisation pour les polynômes).
Ainsi $\psi(x) = (x+c)^2 + c - x = x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = (x^2 - x + c)(x^2 + \beta x + \gamma)$. On obtient β et γ par identification :

$$\psi(x) = (x^2 - x + c)(x^2 + x + c + 1).$$

Les points périodiques de période deux sont donc les racines de $q(x) = x^2 + x + c + 1$ dont le discriminant vaut $\Delta = 1 - 4(c+1)$. La condition $\Delta \geq 0$ équivaut à $c \leq -3/4$.

Attention : pour montrer que ce sont vraiment des points de période 2, on doit voir que ces racines de q ne sont pas racines de φ.
C'est évident si $c < -3/4$ puisque φ n'a plus de racines réelle. Mais dans le cas $c = -3/4$, on vérifie immédiatement que l'unique racine de q est $-1/2$ qui est aussi racine de φ.
Donc pour $c = -3/4$, on n'a pas de point périodique de période 2. On a seulement deux points fixes dont l'un, x_2 n'est plus attractif au sens fort de la définition, mais visiblement on continue à avoir convergence vers x_2. (On est dans le cas indéterminé $|f'(x_2)| = 1$).

Conclusion : f admet des points périodiques de période 2 si, et seulement si, $< -3/4$.

3.4 Utilisation d'un module de calcul formel : `sympy`

a)
```
from sympy import *
x=Symbol('x')
c=Symbol('c')
solution=solve(x**2-x+c,x)
x0,x1=solution
```

Qu'a-t-on obtenu ? Une écriture formelle des solutions de l'équation $x^2 - x + c = 0$, stockée dans les variables `x0,x1`

b)
```
y=x**2+c
yp=diff(y,x)
```

Même question ? Cette fois, on obtient une *expression* de la dérivée de l'expression `x**2+c` par rapport à `x` autrement dit `2*x`

c) Avec

```
 f=x**2+c
f2=compose(f,f)
ptPer2=solve(f2-x,x)
```

On aura dans ptPer2 quatre variables symboliques donnant les expressions : des deux points fixes de f et des deux points périodiques de période 2.

N.B. L'intérêt de cela, c'est que bien sûr on pourrait continuer pour trouver l'expression exacte des points périodiques de période 4 avec :

```
f3=compose(f2,f)
f4=compose(f3,f)
ptPer4=solve(f4-x,x)
```

On trouve :

```
>>> ptPer4
[-sqrt(-4*c - 3)/2 - 1/2, sqrt(-4*c - 3)/2 - 1/2, -sqrt(-4*c + 1)/2 + 1/2, sqrt(-4*c + 1)/2 + 1
```

3.5 Suite de l'étude par expérimentation numérique : la figure de la cascade

Pour différentes valeurs de $c \in [-2, 1/4]$ (disons 10, puis 50 puis 100), on va :

a) Calculer tous les termes de la suite (u_n) ayant comme valeur initiale $u_0 = 0$ (important) et telle que $u_{n+1} = f_c(u_n)$, pour $n \in [\![1, 100]\!]$.

b) Tracer les points $(u(n), c)$ pour $n \in [\![50, 100]\!]$ dans un cadre avec des abscisses dans $[-2, 2]$ et des ordonnées $c \in [-2, 1/4]$. (Le fait de commencer à 50 permet de ne pas tenir compte des premiers termes qui sont ce qu'on pourrait appeler le *régime transitoire*).

On utilisera `plot` avec l'argument `'k.'` pour avoir des points noirs (lettre `k`) ayant des formes de points non reliés `'.'` et le keyword argument `markersize=1` pour que ces points soient petits.

Autrement dit : pour chaque valeur de c en ordonnée, on trace 50 points sur la droite horizontale d'ordonnée c qui sont 50 valeurs de la suite (u_n) pour cette valeur de c.

Solution 3.5 Pour le a) et le b), on peut utiliser le code suivant :

```
c=pl.linspace(-2,0.25,500)
pl.clf()
pl.ylim(-2,0.25)
pl.xlim(-2,2)
for valeur in c:
    def f(x):
        return x**2+valeur
    u=[0]
    for i in range(100):
        u.append(f(u[-1]))
    urep=u[50:100] # les u en abs
    l=len(urep)
    for i in range(len(urep)):
        pl.plot(urep[i],valeur,'k.',markersize=1)
```

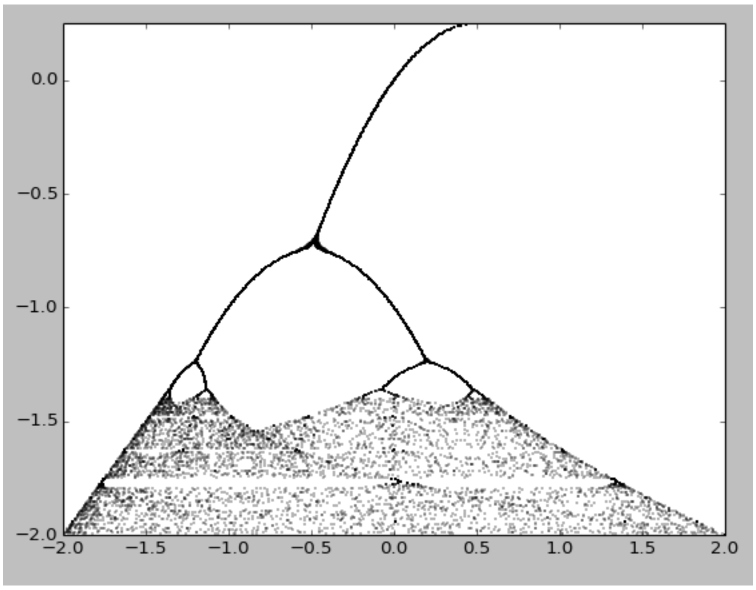
ou bien celui-ci

```
c=pl.linspace(-2,0.25,500)
pl.clf()
pl.ylim(-2,0.25)
pl.xlim(-2,2)
for valeur in c:
    def f(x):
        return x**2+valeur
    u=[0]
    for i in range(100):
        u.append(f(u[-1]))
    urep=u[50:100] # les u en abs
    l=len(urep)
    y=valeur*pl.ones(l)
    pl.plot(urep,y,'k.',markersize=1)
```

Le code de gauche est *beaucoup* plus lent que celui de droite !

Pourquoi : la commande est appelée directement sur des tableaux et non pas pour chaque point.

On obtient la magnifique figure suivante :



c) **Comment interpréter la zone du graphe obtenu pour $c > -3/4 = -0.75$?** Dans chaque ligne, on trace 51 points, mais ils sont tous au même endroit : les valeurs u_n de la suite sont déjà, pour $n \geq 50$ très proches de sa limite : le point fixe attractif.

d) **Comment interpréter la zone du graphe obtenu pour $c \in]-5/4, -3/4[$?**
On a vu par le calcul théorique au c) que cette zone correspondait à l'exercice de points périodiques de période 2. On a vu aussi au b) qu'il n'y a plus de points fixe *attractif*. La figure montre que les deux points périodiques de périodes deux (qui sont de la forme $x_1, f(x_1)$) sont *attractifs*. La suite a deux suites extraites convergentes.

e) **A partir du graphe précédent, en zoomant, en rajoutant éventuellement des valeurs de c déterminer à partir de quelle valeur de c la suite a 4 points 4-périodiques attractifs.** En fait, c'est une conséquence directe du calcul précédent : on a vu que les deux points 2-périodiques attractifs durait jusqu'à $c = -5/4 = -1,25$ c'est donc là que se produit le nouveau *doublement de période.*

f) **Culturel :** Si on continue ainsi, on aura des doublement de période successifs de plus en plus rapprochés. Pour cette application, les valeurs de c donnant ces bifurcations ne tendent pas vers l'infini mais tendent vers $c = -1,40116$. Ce nombre est appelé *point de Feigenbaum* (à ne pas confondre avec la *constante de Feigenbaum* qui est plus universelle, qui exprime elle la limite de écarts entre les doublement de période voir Wikipédia).

Au delà de ce point c, le comportement est difficile à lire au début, peut-être que (u_n) est même dense, mais on observe ensuite de nouveau des *trous* ou *fenêtres* le plus gros trou étant autour de $c = -1,75 = -7/4$.

Exercice : Zoomer autour de $c = -1,75$ et vous verrez trois points formant un cycle attractif de période 3 : $(a, f(a), f^{\circ 2}(a))$ qui se divisent ensuite en cycles de périodes 6, 12...