# Solutions des exercices de mathématiques du T.P. 12

## 2.2 La suites des polynômes de Taylor de l'exponentielle : étude de la suite des zéros

On note $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. On démontre au chapitre F3 que pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$.

(i) Démontrer que les $f_{2n}$ ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$ et que les $f_{2n+1}$ ont un unique zéro dans $\mathbb{R}$.

(iî) On note $x_n$ l'unique zéro de $f_{2n+1}$. A l'aide de PYTHON faire une conjecture sur le comportement de la suite $(x_n)$ (on pourra utiliser la fonction `fsolve` de `scipy.optimitze` pour le calcul approché des zéros). Puis démontrer cette conjecture en faisant des mathématiques.

**Solution élémentaire : sans la formule de Taylor Reste intégral (autre méthode possible avec cette formule...)**

(i) On définit pour tout $n$ le prédicat suivant :

$$\boxed{P_n : f_{2n} > 0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f_{2n+1} \text{ admet un unique zéro dans } \mathbb{R}\text{, qu'on note } x_n.}$$

Montrons par récurrence que $\forall\ n \in \mathbb{N}, P_n$.

• Initialisation $f_0 = 1$ fonction constante, donc $f_0 > 0$ et $f_1 : x \mapsto x+1$ s'annule en $x_0 = -1$ uniquement.

• Hypothèse de récurrence (H.R.) on suppose $P_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

**Remarque :** $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = f_n(x)$.

Comme on sait que $f_{2n+1}$ a pour monôme dominant $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ on sait le signe de $f_{2n+1}$ au voisinage de $\pm\infty$ et $P_n$ dit que $f_{2n+1}$ admet un unique zéro $x_n$ donc $f_{2n+1}$ est négative stmt sur $]-\infty, x_n[$ et positive strictement sur $]x_n, +\infty[$.

Avec la remarque, on en déduit que $f_{2n+2}$ décroit sur $]-\infty, x_n[$ et croît sur $]x_n, +\infty[$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{2n+2}(x) \geq f_{2n+2}(x_n)$ (1).

Or $f_{2n+2}(x_n) = f_{2n+1}(x_n) + \frac{x_n^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0 + \frac{x_n^{2n+2}}{(2n+2)!} > 0$ (2) car $x_n \neq 0$ puisque $f_{2n+1}(0) = 1$.

Avec (1) et (2) on a bien montré que $\boxed{f_{2n+2} > 0 \text{ sur } \mathbb{R} \quad (3)}$ ce qui est « la moitié » de $P_{n+1}$.

D'autre part, avec (3) et la remarque, on sait que $f_{2n+3}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f_{2n+3}$ est continue, strictement croissante et admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$, on en déduit qu'elle s'annule en un unique réel, ce qui, avec (3) donne $P_{n+1}$.

La récurrence est établie. □

(ii) *L'expérimentation numérique (cf. T.P.) semble indiquer que $(x_n)$ décroit.*

Méthode connue pour les suites définies implicitement, on ne compare pas directement $x_n$ et $x_{n+1}$ mais $f_{2n+3}(x_n)$ avec $f_{2n+3}(x_{n+1}) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $f_{2n+3}$ est strictement croissante, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x_{n+1} \leq x_n \quad &\Leftrightarrow \quad f_{2n+3}(x_{n+1}) \leq f_{2n+3}(x_n) \Leftrightarrow 0 \leq 0 + \frac{x_n^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{x_n^{2n+3}}{(2n+3)!}, \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 + \frac{x_n}{2n+3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x_n \geq -(2n+3) \quad (\dagger). \end{aligned}$$

*Par l'absurde* si $x_n < -(2n+3)$ alors $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $x_n < -(2k+1)$, donc $1 + \frac{x_n}{2k+1} < 0$, donc, en multipliant par $x_n^{2k}$, on a $\frac{x_n^{2k}}{(2k)!} + \frac{x_n^{2k+1}}{(2k+1)!} < 0$.

En sommant ces inégalités pour $k = 1, \ldots, n$, on obtient $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_n^{2k}}{(2k)!} + \frac{x_n^{2k+1}}{(2k+1)!} < 0$ donc $f_{2n+1}(x_n) < 0$, *contradiction.*

Ainsi l'inégalité (†) est vraie, ce qui avec les équivalences qui la précèdent, montre que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \leq x_n}$.

Ainsi la suite $(x_n)$ est *décroissante.*

(iii) Montrons que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

*Par théorème de la limite monotone, il suffit de montrer que $(x_n)$ n'est pas minorée*

Soit $m \in \mathbb{R}$. Montrons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n < m$.

Par croissance stricte de la fonction $f_n$, cela équivaut à montrer que $f_n(x_n) < f_n(m)$ i.e. $0 < f_n(m)$.

*Or d'après la propriété rappelée dans l'énoncé, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(x)$.* Donc ici pour $x = m$, $f_n(m) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^m > 0$ donc il existe un rang $n$ tel que $f_n(m) > 0$.

Conclusion : $(x_n)$ n'est pas minorée et comme elle est décroissante $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty}$.

## 3.2 Etude mathématique des points fixes et périodiques de période 2

a) On considère $\varphi_c : x \mapsto f_c(x) - x = x^2 - x + c$. La fonction $f_c$ a (au moins) un point fixe réel ssi $\varphi_c$ a un zéro réel ssi $\Delta = 1 - 4c \geq 0$ donc ssi $\boxed{c \leq \frac{1}{4}}$.

Dans ce cas les deux points fixes sont $x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{1-4c}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1-4c}}{2}$.

b) On a défini un point fixe $x_0$ de $f_c$ est attractif par la condition $|f_c'(x_0)| < 1$. Or ici $f_c'(x) = 2x$ pour tout $x$. Donc : $f_c'(x_1) = 1 + \sqrt{1-4c}$ et $f_c'(x_2) = 1 - \sqrt{1-4c}$.

Ainsi $x_1$ n'est jamais attractif. En revanche, $x_2$ est attractif ssi $1 - \sqrt{1-4c} > -1$ Cette condition équivaut à $2 > \sqrt{1-4c}$ ou encore $4 > 1 - 4c$ ou encore $c > -3/4$.

Dans le cas $c = 1/4$, $x_2 = x_1$ n'est pas non plus attractif.

$\boxed{\textbf{Conclusion :}\ \text{Donc } f_c \text{ admet un point fixe attractif ssi } c \in ]-3/4, 1/4[.}$

c) On considère $\psi(x) = (f \circ f)(x) - x$. Les zéros de $\psi$ sont les points $x$ tels que $f(f(x)) = x$. Ils représentent les points fixes de $f$ et les points périodiques de période 2. Ainsi (idem ex. cours) on peut factoriser $\psi(x)$ par $f(x) - x$ (lemme de factorisation pour les polynômes).

Ainsi $\psi(x) = (x+c)^2 + c - x = x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = (x^2 - x + c)(x^2 + \beta x + \gamma)$. On obtient $\beta$ et $\gamma$ par identification :

$$\psi(x) = (x^2 - x + c)(x^2 + x + c + 1).$$

Les points périodiques de période deux sont donc les racines de $q(x) = x^2 + x + c + 1$ qui ne sont pas racines de $\varphi(x) = x^2 - x + c$.

Remarquons déjà que le discriminant de $q$ vaut $\Delta = 1 - 4(c+1)$. La condition $\Delta_q \geq 0$ équivaut à $c \leq -3/4$.

Etudions déjà si $\varphi$ et $q$ peuvent avoir des racines communes : supposons qu'on ait un $x$ vérifiant simultanément $\begin{cases} x^2 - x + c = 0, \\ x^2 + x + c + 1 = 0 \end{cases}$

Alors par différence $2x + 1 = 0$ donc $x = -1/2$. Or avec les formules du a), $-1/2$ est racine de $\varphi$ ssi $\sqrt{1-4c} = 2$ ssi $c = -3/4$. Ainsi :

• Pour $c = -3/4$, $q$ admet une seule racine ($\Delta_q = 0$) qui est racine de $\varphi$, donc point fixe de $f$ : pas de point périodique de période 2.

• Pour $c < -3/4$, $q$ admet deux racines réelles qui ne sont pas racines de $\varphi$, donc deux points périodique de période deux.

Donc

$$\boxed{\text{la CNS cherchée est } c < -3/4.}$$