

## TP 11 : enveloppes convexes, solutions

### Question 1.

```
def plusBas(tab):
    xmin=tab[0][0]
    ymin=tab[1][0]
    j=0
    for i in range(len(tab[0])):
        if tab[1][i]<ymin :
            j=i
            xmin=tab[0][i]
            ymin=tab[1][i]
        elif tab[1][i]==ymin:
            if tab[0][i]<xmin:
                j=i
                xmin=tab[0][i]
    return j
```

**Question 2.** Le test d'orientation donne +1 pour  $i = 7, j = 3, k = 4$ .

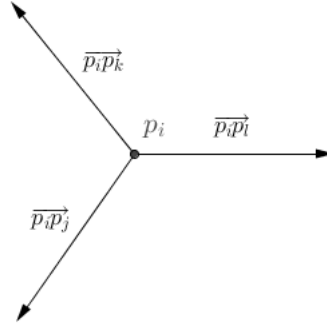
Il donne -1 pour  $i = 8, j = 9, k = 10$ .

### Question 3.

```
def orient(tab,i,j,k):
    pi=np.array([tab[0][i],tab[1][i]])
    pj=np.array([tab[0][j],tab[1][j]])
    pk=np.array([tab[0][k],tab[1][k]])
    vec1=pj-pi
    vec2=pk-pi
    det=vec1[0]*vec2[1]-vec1[1]*vec2[0]
    if det>0:
        return 1
    elif det==0:
        return 0
    else :
        return -1
```

### Question 4.

- réflexivité : soit  $j \neq i$ , par déf.  $\text{orient}(\text{tab}, i, j, j) = 0$  a fortiori  $\text{orient}(\text{tab}, i, j, j) \leq 0$  donc  $p_j \leq p_j$ .
- Antisymétrie : soit  $j, k \neq i$ , tels que  $p_j \leq p_k$  et  $p_k \leq p_j$ . Alors  $\det(\overrightarrow{p_i p_j}, \overrightarrow{p_i p_k}) \leq 0$  et  $\det(\overrightarrow{p_i p_k}, \overrightarrow{p_i p_j}) \leq 0$   
Or  $\det(\overrightarrow{p_i p_j}, \overrightarrow{p_i p_k}) = -\det(\overrightarrow{p_i p_k}, \overrightarrow{p_i p_j})$  donc ici  $\det(\overrightarrow{p_i p_k}, \overrightarrow{p_i p_j}) = 0$ .  
Ceci signifie que les points  $p_i, p_j, p_k$  sont alignés. Or par l'hypothèse de position générale de l'énoncé, ceci signifie que deux d'entre eux sont confondus. Enfin comme  $p_j$  et  $p_k$  sont distincts de  $p_i$  on conclut que  $p_j = p_k$ .
- transitivité : soit  $j, k, l \neq i$ , tels que  $p_j \leq p_k$  et  $p_k \leq p_l$ .  
On a donc  $\det(\overrightarrow{p_i p_j}, \overrightarrow{p_i p_k}) \leq 0$  et  $\det(\overrightarrow{p_i p_k}, \overrightarrow{p_i p_l}) \leq 0$ .  
**Attention :** sans hypothèse particulière sur  $p_i$  on ne pourrait rien conclure comme le montre le dessin suivant :



Dans ce dessin, pour la relation  $\leq$  associée à  $p_i$ , on a bien :  $p_j \leq p_k$  (on tourne dans le sens inverse-trigo de  $p_j$  à  $p_k$ ) de même  $p_k \leq p_l$  mais on n'a pas  $p_j \leq p_l$ .

La raison en est qu'en considérant les représentants dans  $[-\pi, \pi]$  des angles orientés  $\widehat{(p_i p_j, p_i p_k)} \equiv \theta_1 \in [-\pi, 0]$ ,  $\widehat{(p_i p_k, p_i p_l)} \equiv \theta_2 \in [-\pi, 0]$ , on a  $\theta_1 + \theta_2 < -\pi$ .

Mais ici, un tel phénomène ne peut pas se produire car :

- Pour le premier point  $p_i$  choisi : il est par déf. en bas à gauche du nuage de points. Donc tous les points  $p_j, p_k, p_l$  sont dans le demi-plan (fermé) délimité par la droite horizontale passant par  $p_i$ .
  - Pour les autres point  $p_i$  insérés : si  $p_r$  est le point inséré avant  $p_i$  alors par construction de  $p_i$  tous les points  $p_j \in P \setminus \{p_i, p_r\}$  seront dans le demi plan à gauche de  $(p_r p_i)$ .
- Totalité : soit  $j, k \neq i$ . Alors si  $\det(\overrightarrow{p_i p_j}, \overrightarrow{p_i p_k}) \leq 0$ , on a  $p_j \leq p_k$ , sinon  $\det(\overrightarrow{p_i p_j}, \overrightarrow{p_i p_k}) \geq 0$  et  $\det(\overrightarrow{p_i p_k}, \overrightarrow{p_i p_j}) \leq 0$  et donc  $p_k \leq p_j$ .

#### Question 5.

```
def prochainPoint(tab,i):
    if i==0:
        temoin=1
    else:
        temoin=0
    n=len(tab[0])# le nombre d'entrées dans une ligne
    for j in range(n):
        if j!=i:
            if orient(tab,i,temoin,j)<0:
                temoin=j
    return temoin
```

**N.B.** La distinction de cas au départ pour l'initialisation de `temoin` est nécessaire car sinon, pour  $i$  et `temoin` égaux, on aurait *toujours* `orient(tab,i,temoin,j)=0`.

**Question 6.** On a  $i=10$  par hypothèse. Ainsi on commence avec `temoin=0` ce qui signifie qu'on va considérer au départ les orientations de  $(\overrightarrow{p_{10} p_0}, \overrightarrow{p_{10} p_j})$ .

- Quand  $j=0$ , `orient(tab,i,temoin,j)<0` a la valeur `False` car  $\det(\overrightarrow{p_{10} p_0}, \overrightarrow{p_{10} p_0}) = 0$ .
- Quand  $j=1$ , `orient(tab,i,temoin,j)<0` a la valeur `True` car  $\det(\overrightarrow{p_{10} p_0}, \overrightarrow{p_{10} p_1}) < 0$ .  
Donc changement de témoin : `temoin=1`.
- Quand  $j=2$ , `orient(tab,i,temoin,j)<0` a la valeur `True` car  $\det(\overrightarrow{p_{10} p_1}, \overrightarrow{p_{10} p_2}) < 0$ .  
Donc changement de témoin : `temoin=2`.
- pour  $j=3, 4$ , on a  $\det(\overrightarrow{p_{10} p_2}, \overrightarrow{p_{10} p_j}) > 0$ . Pas de changement de témoin.
- pour  $j=5$ , on a  $\det(\overrightarrow{p_{10} p_2}, \overrightarrow{p_{10} p_5}) < 0$ .  
Donc changement de témoin : `temoin=5`.
- pour tous les  $j$  supérieurs ou égaux à 6, on a  $\det(\overrightarrow{p_{10} p_5}, \overrightarrow{p_{10} p_j}) \geq 0$ .  
Il n'y a plus de changement de témoin. La fonction renvoie donc 5.

### Question 7.

```
def convJarvis(tab,n):
    pointInitial=plusBas(tab,n)
    L=[]
    pointcourant=pointInitial
    while True:
        L.append(pointcourant)
        pointcourant=prochainPoint(tab,n,pointcourant)
        if pointcourant==pointInitial:
            return L
```

**Question 8.** Comme la fonction finale `convJarvis` appelle les fonctions `plusBas` et `prochainPoint`, on examine la complexité de ces deux fonctions :

- Dans `plusBas`, la boucle `for` fait  $n$  tours de boucle. A chaque tour de boucle le nombre d'opérations est majoré par 6 (3 test booléens, 3 affectations), en tout cas indépendant de  $n$ .

Ainsi la complexité de la fonction `plusBas` est en  $O(n)$  (et en fait inférieure à  $6n$ ).

(On n'a pas compté le calcul de `len(tab1[0])` dont on ne connaît la complexité que si on sait comment cette donnée est codée, mais de toute façon cette complexité n'est pas plus que linéaire.)

- La fonction `orient` est de complexité constante indépendante de la longueur de `tab` i.e. en  $O(1)$ .

- Dans `prochainPoint` on a encore une seule boucle `for` avec  $n$  tours de boucles et un nombre majoré par une constante d'opérations à chaque tour de boucles donc `prochainPoint` est en  $O(n)$ .

- Enfin dans `convJarvis` on a donc :

- Un appel à `plusBas` en  $O(n)$ ,
- une boucle `while` qui fait exactement  $m$  tours de boucles (où  $m$  est le nombre de points du bord de `conv(C)`).
- à chaque tour de boucle : un appel à `prochainPoint` en  $O(n)$  et 2 autres opérations (test booléen et ajout dans une liste); donc une complexité encore en  $O(n)$  à chaque tour.

Au total la boucle coûte  $O(nm)$  opérations et donc :

la fonction `convJarvis` a une complexité en  $O(mn) + O(n) = O(mn)$ .

**Question 8** : il n'y a rien d'autre à faire que de taper `paquetCadeau(tab)` et à s'émerveiller !

### Question 9 :

```
def jarvisAleatoire(n=10, fenetre=[[-5,5],[-5,5]]):
    """Affiche un nuage de n points aléatoire, dans la fenêtre [[xMin,xMax],[yMin,yMax]],
    et son paquet cadeau obtenu par l'algorithme de Jarvis."""
    from random import uniform
    #On utilise des floats pour éviter d'avoir des points alignés.
    tab2=[[uniform(fenetre[0][0],fenetre[0][1]) for i in range(n)],
          [uniform(fenetre[1][0],fenetre[1][1]) for i in range(n)]]
    paquetCadeau(tab2)
```