

1 Calculs d'inverses de matrices particulières (cours §II 1) du G2)

1.1 Par l'inversion du système $Y = AX$: des systèmes ici très « symétriques »

a) (**En classe**) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère l'équation matricielle $Y = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ qu'on écrit comme un système :

$$\begin{cases} y_1 = a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ y_n = a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

Pour montrer que A^{-1} existe dans $M_n(\mathbb{Q})$ et la calculer, une méthode (déjà dite en cours) est de résoudre ce système pour obtenir $X = BY$. La matrice B est alors A^{-1} .

Méthode ici : Pour résoudre le système, on peut lui rajouter la ligne supplémentaire $L = L_1 + \dots + L_n$

b) (**A la maison**) Reprendre le calcul précédent pour déterminer la CNS sur $(a, b) \in K^2$ pour que la

matrice $B = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$ soit inversible et déterminer son inverse.

Calculer B^{-1}

c) (**A la maison**) Une matrice du nature différente, mais aussi avec une certaine symétrie.

Soit $C = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrer que C est inversible dans $M_n(\mathbb{Q})$ et calculer C^{-1} .

1.2 Par une relation polynomiale vérifiée par A

Une idée générale : si une matrice A vérifie une relation polynomiale de la forme $a_p A^p + a_{p-1} A^{p-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0$ alors $A(a_p A^{p-1} + \dots + a_1 I) = -a_0 I$ et si $a_0 \neq 0$, on en déduit que l'inverse de A est $-\frac{1}{a_0}(a_p A^{p-1} + \dots + a_1 I)$.

a) (**En classe**) On reprend la matrice du 1.1. a). Calculer A^2 et l'exprimer en fonction de A et I . Retrouver à l'aide de cette relation que A est inversible et la valeur de A^{-1} .

b) (**A la maison**) Faire la même chose pour la matrice B du 1.1. b).

c) (**A la maison**) Adapter pour trouver l'inverse de $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$.

1.3 En explicitant plus facilement l'inverse d'une A.L. définissant cette matrice :

a) (**En classe**) Cas d'une matrice de permutation : soit $P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{Q})$. Calculer P^{-1}

en commençant par trouver l'application réciproque de l'endomorphisme canoniquement associé à P .

b) (**A la maison**) Un cas où il faut un peu d'imagination : Soit $T = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n} \\ 0 & \binom{1}{1} & & \cdots & \binom{n}{n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \in$

$TS_{n+1}(\mathbb{Q})$.

Montrer que T est inversible et calculer T^{-1} en interprétant T comme la matrice d'un endomorphisme d'un e.v. de dim. $n+1$ bien choisi, dont l'application réciproque est facile à trouver.

1.4 Généralité de la méthode du 1.2 : existence d'un polynôme annulateur et sous-algèbres

a) Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{K})$ il existe un entier $r \leq n^2$ des coefficients $(a_0, \dots, a_r) \neq (0, \dots, 0)$ tels que $a_0 I + a_1 A + \dots + a_r A^r = 0$.

Le polynôme $P : X \mapsto a_0 + a_1 X + \dots + a_r X^r$ s'appelle un *polynôme annulateur de A*.

b) En déduire que pour toute matrice inversible $A \in M_n(\mathbb{K})$ il existe des coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ dans K tels que $A^{-1} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_k A^k$ (on dit que A^{-1} est un polynôme en A).

c) En déduire que si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $M_n(K)$ et $A \in \mathcal{A}$ est inversible dans $M_n(K)$ alors $A^{-1} \in \mathcal{A}$.

1.5 Le cas des matrices triangulaires : utilisation de toutes les méthodes précédentes

a) Soit $T \in TS_n(\mathbb{K})$. Montrer que si l'une des entrées diagonales $t_{i,i}$ de T est nulle, alors T n'est pas inversible.

b) Soit $T \in TS_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $i = 1, \dots, n$, $t_{i,i} \neq 0$. On va montrer que T est inversible et que $T^{-1} \in TS_n(\mathbb{K})$ de trois façons différentes, en appliquant les méthodes vues dans trois paragraphes précédents.

i) Suivant le 1.1., on considère le système $Y = TX$. Montrer qu'on peut le résoudre en un système $X = T'Y$ avec T' encore triangulaire supérieure (on n'explicitera pas tous les coefficients de T' en fonction de T mais on montrera comment on les obtient). Cette méthode donnera ensuite lieu à un T.P. en Python.

Dans les deux méthodes suivantes, on suppose connu le fait que T est inversible et on montre que T^{-1} est T.S.

ii) Suivant le 1.3, on considère l'endomorphisme f canoniquement associé à T . On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n . Montrer que le fait que T soit T.S. signifie géométriquement que pour tout $i = 1, \dots, n$ le sous-espace $F_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ est stable par f .

Montrer alors que chaque F_i est aussi stable par f^{-1} et en déduire que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$ est aussi T.S.

iii) Montrer que le 1.4. c) s'applique directement pour montrer que $T^{-1} \in TS_n(\mathbb{K})$.

1.6 Le cas de « petites sous-algèbres » de $M_n(K)$

a) On reprend l'exemple de la matrice A du 1.1. On remarque que cette matrice A peut aussi s'écrire $A = E - I$ où E est la matrice dont toutes les entrées valent 1. Il se trouve que A^{-1} s'écrit aussi sous la forme $A^{-1} = \lambda I + \mu E$ et ceci n'a rien à voir avec le hasard. En effet si on note $\mathcal{A} = \text{Vect}(I, E)$

i) vérifiez que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $M_n(K)$.

(En fait il y a très peu de choses à vérifier : s.e.v. par déf. et pour sous-anneau peu de choses qui se résument au calcul de E^2 ..)

ii) En déduire qu'on sait que A^{-1} si elle existe s'écrit $A = \alpha I + \beta E$ et qu'on peut facilement calculer A^{-1} en cherchant simplement $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}$ tels que $(-I + E)(\lambda I + \mu E) = I$.

iii) (**A la maison**) Faire de même pour retrouver le calcul de B^{-1} pour la matrice B du 1.1

b) (**A la maison**) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Un ordinateur donne $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{29}{50} & -\frac{1}{50} & -\frac{1}{50} & -\frac{1}{50} & -\frac{21}{50} \\ -\frac{1}{50} & \frac{29}{50} & -\frac{1}{50} & -\frac{21}{50} & -\frac{1}{50} \\ -\frac{1}{50} & -\frac{1}{50} & \frac{9}{50} & -\frac{1}{50} & -\frac{1}{50} \\ -\frac{1}{50} & -\frac{21}{50} & -\frac{1}{50} & \frac{29}{50} & -\frac{1}{50} \\ -\frac{21}{50} & -\frac{1}{50} & -\frac{1}{50} & -\frac{1}{50} & \frac{29}{50} \end{pmatrix}$

Expliquer.

2 Conditions d'inversibilité sans calculs d'inverse

2.1 Autour du résultat classique sur les matrices à diagonales dominantes : C.S. d'inversibilité

2.1.1 Le résultat avec une démonstration :

Propriété (Hors-programme, donc c'est un exercice classique à savoir refaire) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{k \neq i, k=1}^n |a_{i,k}|$. (On dit que A est à diagonale strictement dominante). Alors la matrice A est inversible.

Dém. Idée déjà : – Raisonner par l'absurde et considérer un $X \in \ker A \setminus \{0\}$.

Soit donc A comme dans l'énoncé et supposons *par l'absurde* qu'on ait un $X \in \ker A \setminus \{0\}$. L'égalité $AX = 0$ s'écrit comme un système :

$$\begin{cases} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{cases} \quad \text{où } L_i : a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n = 0.$$

Idée 1 : Si on prend les modules dans les égalités L_i on n'obtiendra rien d'intéressant car l'I.T. nous donnera qu'une somme de module est positive, pas surprenant ! Donc pour se rapprocher de l'hypothèse de l'énoncé, on isole le terme d'indice i . Autrement dit :

$$L_i \Leftrightarrow a_{i,i}x_i = - \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j \Rightarrow |a_{i,i}||x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}||x_j| \quad (*).$$

Idée 2 : cela prend bien le chemin d'une contradiction avec l'inégalité de l'énoncé, mais il faut encore se débarrasser des x_i, x_j . Il faudrait pour cela dans le membre de droite majorer tous les $|x_j|$ de façon à factoriser le terme $\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. D'où l'idée :

On choisit une ligne L_i telle que $|x_i| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$.

$$\text{Alors } (*) \Rightarrow |a_{i,i}||x_i| \leq \left(\sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right) |x_i|.$$

Comme par hyp. $X \neq 0$, $|x_i| \neq 0$ et donc en divisant par $|x_i|$, on obtient :

$$|a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|,$$

ce qui est la contradiction. □

2.1.2 Variante plus simple... à vous de jouer

Soit $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ avec $m_{i,j} = 1$ pour tout $i \neq j$ et pour tout $i = 1, \dots, n$, $m_{i,i} = a_i > 1$.

Montrer que M est inversible.

2.2 Conditions nécessaires sur les coefficients de certaines matrices inversibles

- Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont non nuls. Montrer que M^{-1} a au plus $n^2 - 2n$ coefficients nuls.
- Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ d'inverse $B = A^{-1}$ telle que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ on ait $a_{i,j} \geq 0$ et $b_{i,j} \geq 0$. Montrer que dans chaque ligne de A il y a un et un seul élément non nul.