

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$ -e.v. de dim. 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on note $f_{\alpha, \beta}$ l'endomorphisme défini dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice $M_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} \alpha & -2\alpha \\ 2\beta & \beta \end{pmatrix}$.

a) Déterminer l'ensemble des couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f_{\alpha, \beta}$ soit un projecteur. Déterminer dans ce cas les éléments caractéristiques de ce projecteur.

b) Déterminer l'ensemble des couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f_{\alpha, \beta}$ soit une symétrie. Déterminer dans ce cas les éléments caractéristiques de cette symétrie.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. a) Calculer A^2 et A^3 . b) En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 3 (Forme du produit avec une matrice diagonale, à retenir).

a) Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ et $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ une matrice diagonale.

Expliciter les produits AD et DA et retenir ce résultat.

b) On suppose que $d_1, \dots, d_n$ sont deux à deux distincts et on note encore $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_D = \{A \in M_n(\mathbb{K}), AD = DA\}$ (commutant de la matrice D).

'c) Si $n = 3$ et $D = \text{diag}(d, d, d')$ avec $d' \neq d$, déterminer $\mathcal{C}_D$

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Soient $a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$. Calculer M^2 .

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$. a) Calculer M^2 .

b) En déduire que M est inversible et le calcul de M^{-1} .

Exercice 7. Donner un exemple de matrice nilpotente dont aucune des entrées n'est nulle.

Exercice 8 (Une application « concrète » du produit de matrices... vue en terminale?).

a) Soit $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(i) Exprimer M en fonction de la matrice I et de la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) En déduire une formule simple donnant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M^n en fonction de I et E , et écrire explicitement la matrice M^n comme un tableau.

b) On fixe deux réels $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par la donnée de ce couple (u_0, v_0) et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n), \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases}$$

En introduisant la suite de vecteurs (X_n) définis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, déterminez la limite des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice 9 (Une autre application du produit de matrice...plus théorique ... serez vous dire laquelle?). Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note I la matrice unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{K} = \text{Vect}(I, J) \subset M_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\mathcal{K}$ est un sous-anneau de $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$.

b) Montrer que $\mathcal{K}$ est un corps, isomorphe à un corps connu.

Solution 1 a) $M_{\alpha,\beta}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 4\alpha\beta & -2\alpha^2 - 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta + 2\beta^2 & -4\alpha\beta + \beta^2 \end{pmatrix}.$

a) $f = f_{\alpha,\beta}$ est un projecteur si, et seulement si, $f^2 = f$ ce qui ici donne le système

$$\begin{cases} \alpha^2 - 4\alpha\beta = \alpha, \\ 2\alpha\beta + 2\beta^2 = 2\beta, \\ -2\alpha^2 - 2\alpha\beta = -2\alpha, \\ -4\alpha\beta + \beta^2 = \beta \end{cases}$$

Via $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_4$ on a $L_2 : \alpha\beta = 0$, ce qui donne, en remplaçant $\alpha\beta$ par 0 partout, comme système équivalent :

$$\begin{cases} \alpha^2 = \alpha \\ \alpha\beta = 0, \\ \beta^2 = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1, \\ \alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0, \\ \beta = 0 \text{ ou } \beta = 1 \end{cases}$$

Il y a trois couples solutions $(0,0), (0,1), (1,0)$.

Dans le cas $\alpha = \beta = 0$, f est l'application nulle.

Dans le cas $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, $M_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'image est $\mathbb{R}e_1$ et le noyau est $\mathbb{R}v$ où $v = 2e_1 + e_2$.

Dans le cas $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, $M_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. L'image est $\mathbb{R}e_2$ et le noyau est $\mathbb{R}w$ où $w = e_1 - 2e_2$.

b) $M_{\alpha,\beta}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 4\alpha\beta & -2\alpha^2 - 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta + 2\beta^2 & -4\alpha\beta + \beta^2 \end{pmatrix}.$

Or $f = f_{\alpha,\beta}$ est une symétrie ssi $f^2 = \text{id}$, donc ssi on a le système $\begin{cases} \alpha^2 - 4\alpha\beta = 1, \\ 2\alpha\beta + 2\beta^2 = 0 \\ -2\alpha^2 - 2\alpha\beta = 0, \\ -4\alpha\beta + \beta^2 = 1 \end{cases}$

Qui est équivalent, en enlevant les 2 inutiles à : $\begin{cases} \alpha^2 - 4\alpha\beta = 1, \\ \alpha\beta + \beta^2 = 0 \\ \alpha^2 + \alpha\beta = 0, \\ -4\alpha\beta + \beta^2 = 1 \end{cases}$

Ainsi L_2 et L_3 équivalent à $\alpha^2 = \beta^2 = -\alpha\beta$ et si on remplace $\alpha\beta$ par $-\alpha^2$ dans L_1 on a : $5\alpha^2 = 1$ et on retrouve la même chose dans L_4 (qui est donc inutile).

Donc le système équivaut à $\alpha^2 = \beta^2 = -\alpha\beta = 1/5$. En part. α et β ne sont pas nuls, donc $\alpha^2 = -\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha = -\beta$ et donc les deux couples (α, β) solutions sont $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ et $(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$

• Dans le cas du couple $(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$.

On a $M_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$

Alors $v \in \text{Fix}(f)$ pour $v \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ équivaut à $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{5}x \\ -2x - y = \sqrt{5}y \end{cases}.$

Ces deux équations sont équivalentes (il devait de toutes façons en être ainsi!! sinon le Fix serait trivial) et définissent la droite d'équation $2x + (1 + \sqrt{5})y = 0$ et donc de vecteur dir. par exemple $(1 + \sqrt{5})e_1 - 2e_2$.

(Mais bien sûr, il est juste aussi de dire que l'équation est $(\sqrt{5} - 1)x + 2y = 0$ et qu'un vecteur directeur est $2e_1 + (1 - \sqrt{5})e_2$, il suffit de multiplier la première équation par $(\sqrt{5} - 1)/2$ pour avoir la deuxième).

Reste à déterminer la direction de symétrie i.e. $\text{AFix}(f)$.

Or, avec les mêmes notations, $v \in \text{AFix}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -\sqrt{5}x \\ -2x - y = -\sqrt{5}y \end{cases}.$

Là encore les deux équations sont nécessairement proportionnelles et définissent donc la droite d'équation $2x + (1 - \sqrt{5})y = 0$, de vecteur directeur $(\sqrt{5} - 1)e_1 + 2e_2$ (ou encore, pour la même droite, on peut considérer l'équation $(1 + \sqrt{5})x - 2y = 0$ et comme vecteur $2e_1 + (1 + \sqrt{5})e_2$).

• Pour l'autre couple, nul besoin de recommencer les calculs car on a l'opposée de l'application précédente, ce qui dit que Fix de l'un est AFix de l'autre et inversement !

Solution 2 a) $A^2 = A^3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Si on avait A inversible, en multipliant les deux membres de l'égalité $A^3 = A^2$ par $(A^{-1})^2$ on en déduirait $A = I$ ce qui n'est pas vrai.. $\square$

Solution 3 a) $AD = \begin{pmatrix} d_1 a_{1,1} & d_2 a_{1,2} & \dots & d_n a_{1,n} \\ d_1 a_{2,1} & d_2 a_{2,2} & \dots & d_n a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_1 a_{n,1} & d_2 a_{n,2} & \dots & d_n a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Une façon simple de voir cela sans aucun calcul est de penser que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_j(AD) =$

$AC_j(D)$ et comme $C_j(D) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ d_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ la colonne C_j de AD est d_j fois la colonne j de A .

De même $DA = \begin{pmatrix} d_1 a_{1,1} & d_1 a_{1,2} & \dots & d_1 a_{1,n} \\ d_2 a_{2,1} & d_2 a_{2,2} & \dots & d_2 a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_n a_{n,1} & d_n a_{n,2} & \dots & d_n a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Une façon simple de voir cela sans aucun calcul est de penser que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L_i(DA) = L_i(D)A$ et comme $L_i(D) = (0 \dots d_i \dots 0)$, on a : $L_i(DA) = d_i L_i(A)$.

b) Soit $A \in \mathcal{C}_D$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$. Alors en comparant l'entrée (i, j) de AD et celle de DA on a $d_j a_{i,j} = d_i a_{i,j}$ et comme $d_i \neq d_j$ par hyp., on conclut que $a_{i,j} = 0$. Donc A est une matrice diagonale.

Réciproquement, si A est diagonale, comme D est diagonale, et qu'on sait que le produit de deux matrices diagonales est commutatif, on conclut que $A \in \mathcal{C}_D$.

Conclusion $\mathcal{C}_D = D_n(\mathbb{K})$. $\square$

c) Cette fois on trouve toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ donc un commutant « plus

gros ». Il sera intéressant de comprendre ce résultat géométriquement après le DM 14 dernière partie.

Solution 4 (M1) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $P(n)$ suivante est vraie $P(n) : A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

- $P(1)$ est évidente
- Supposons $P(n)$ vraie pour un $n \geq 1$.

Alors $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$. Et par calcul du produit des deux matrices, on a :

$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & na^n b + ba^n \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$ et la prop. $P(n+1)$.

La réc. est établie. $\square$

(M2) Avec la formule du binôme, en écrivant $A = aI + bJ$ avec I et J qui commutent.

Solution 5 Calcul immédiat mais utile comme pratique : $M^2 = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & \dots & a_{n-1} b_1 & 0 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & \dots & a_{n-1} b_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1 b_{n-1} & a_2 b_{n-1} & \dots & a_{n-1} b_{n-1} & 0 \\ 0 & & & 0 & \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i \end{pmatrix}$.

Solution 6 a) On calcule $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ 1/a & 2 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 2 \end{pmatrix}$.

b) Ainsi $M^2 = M + 2I$ ce qui donne $M^2 - M = 2I$ et donc $M \frac{(M-I)}{2} = I$ donc M est inversible d'inverse $(M-I)/2$.

Solution 7 On cherche un contre-exemple avec une matrice 2×2 : du coup, pour u canoniquement associé on doit avoir $\text{Im}(u) = \ker(u)$. Donc on fixe un vecteur de $\text{Im}(u)$ par exemple le vecteur $(1, 1)$. Donc on va prendre $u(e_1) = e_1 + e_2$ et on veut ensuite que ce vecteur soit dans $\ker(u)$ donc que $u(e_1 + e_2) = 0$ donc $u(e_1) = -u(e_2)$ donc $u(e_2) = -e_1 - e_2$.

Ainsi $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ convient.

Solution 8 a) (i) $M = \frac{1}{3}(I + E)$ par vérification immédiate sur la somme des deux matrices.

(ii) La formule du binôme de Newton s'applique aux deux matrices I et E parce qu'elles commutent (à dire absolument.) Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \frac{1}{3^n}(I + E)^n = \frac{1}{3^n} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E^k \cdot I^{n-k} \right) = \frac{1}{3^n} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E^k \right).$$

Or $E^2 = 2E$ (*). Par récurrence immédiate on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E^k = 2^{k-1}E$.

Attention : cette formule est fautive si $k = 0$ et $E^0 = I$.

Donc en remplaçant dans la formule du binôme, $M^n = \frac{1}{3^n} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k-1} E + I \right)$.

Donc $M^n = \frac{1}{3^n} I + \frac{1}{3^n} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k-1} \right) E$.

Or, en notant $S = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k-1}$, on a $S = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k - 1 \right) = \frac{1}{2} (3^n - 1)$.

Donc, comme on a dit que $M^n = \frac{1}{3^n} I + \frac{1}{3^n} S E$, on a $M^n = \frac{1}{3^n} \left(I + \frac{3^n - 1}{2} E \right)$.

Explicitement $M^n = \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} \frac{3^n + 1}{2} & \frac{3^n - 1}{2} \\ \frac{3^n - 1}{2} & \frac{3^n + 1}{2} \end{pmatrix}$.

b) La déf. des suites (u_n) et (v_n) se traduit par : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = M X_n$.

Par réc. immédiate, on obtient que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = M^n X_0$.

Donc par le calcul du a) $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} \frac{3^n + 1}{2} & \frac{3^n - 1}{2} \\ \frac{3^n - 1}{2} & \frac{3^n + 1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ (†).

En retraduisant cette égalité matricielle sous forme de système et en considérant la limite des membres de droite quand n tend vers l'infini, on obtient que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{u_0 + v_0}{2}$ et de même $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{u_0 + v_0}{2}$.

c) **Remarque :** on peut répondre au b) sans utiliser les matrices et les techniques d'algèbre linéaire. En effet, si on cherche un *invariant* associé à la déf. de (u_n) et (v_n) on remarque que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$ et que $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{3}$.

Par réc. immédiate, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + v_n = u_0 + v_0$ et $u_n - v_n = \frac{1}{3^n} (u_0 - v_0)$. Il est alors facile de réobtenir le système (†).