

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension trois, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ défini dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
- En prenant pour nouvelle base $\mathcal{B}'$ de E une famille (v_1, v_2, v_3) avec v_1 et v_2 dans $\ker f$ et v_3 dans $\operatorname{Im} f$, écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
- Décrire f comme la composée de deux transformations géométriques simples, commutant entre elles.
- En déduire une description analogue pour la composée $f^n \in \mathcal{L}(E)$ (notation habituelle : l'exposant désigne : la composée n fois).

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dim. 4, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

- Déterminer, suivant α , le rang de f .
- Expliciter une base de $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.
- Pour quelles valeurs de α , l'image et le noyau de f sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 3 (En sens inverse : de la description géométrique à la matrice). Soit $E = \mathbb{R}^3$. On considère D d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ et P d'équation $x + y + z = 0$.

- Montrer que $D \oplus P = E$.
- Déterminer la matrice dans la base can. de $\mathbb{R}^3$ du projecteur sur D parallèlement à P dans la base $\mathcal{B}$.

Indication – Une fois fixé un vecteur directeur $u \in D$, on remarque que pour chaque vecteur $v = (x, y, z)$, la connaissance de $p(v)$ se ramène à la connaissance du coefficient $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $p(v) = \lambda u$.

Exercice 4. Pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

Démontrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_d[X]$, il existe un $Q \in \mathbb{R}_{d+1}[X]$ tel que $\Delta Q = P$.

Du calcul dans l'algèbre $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$

Exercice 5. a) Montrer que si E est un e.v. et f et g sont deux endomorphismes de E qui commutent entre eux i.e. tels que $f \circ g = g \circ f$ alors $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g i.e. $g(\ker f) \subset \ker f$ et $g(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Im} f$.

b) Soit E un e.v. et p un projecteur de E . Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ se valent :

- f et p commutent i.e. $f \circ p = p \circ f$,
- $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stables par f i.e. $f(\ker p) \subset \ker p$ et idem pour $\operatorname{Im} p$.

c) Soient p et q deux projecteurs de E . Montrer que leur somme $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q + q \circ p = 0$ puis ssi $p \circ q = q \circ p = 0$. (On suppose que dans $\mathbb{K}$, $2.1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$).

Exercice 6 (Nilpotence : propriétés de base). a) Donner un exemple (par sa matrice) d'un endomorphisme non trivial f de E de dimension 3, telle que $\operatorname{Im} f \subset \ker f$. Que dire alors de f^2 ?

b) D'une manière générale un endomorphisme est nilpotent s'il existe un r tel que $f^r = 0$.

On appelle indice de nilpotence de f le plus petit r tel que $f^r = 0$.

Donner un exemple d'endomorphisme nilpotent d'indice 3 dans un e.v. de dim 3.

c) Montrer que si f est nilpotent d'indice r et $v \in E$ vérifie $f^{r-1}(v) \neq 0$ alors la famille $(v, f(v), f^2(v), \dots, f^{r-1}(v))$ est libre.

d) En déduire que si E est de dim. n , tout $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent est d'indice au plus n .

e) Un peu d'algèbre dans $\mathcal{L}(E)$: justifier que si deux endomorphismes f, g commutent alors : $f^n - g^n = (f - g) \circ (f^{n-1} + f^{n-2} \circ g + \dots + g^{n-1})$.

En déduire que si $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, alors $\operatorname{id} - f$ est inversible (i.e. bijective).