Exercice 1 (Images directes par des applications linéaires)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et E_1 et E_2 deux s.e.v. de E tels que $E_1 + E_2 = E$.

Soit F un autre $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

a) Montrer que $f(E) = f(E_1) + f(E_2)$.

b) On suppose maintenant que f est injective et que $E = E_1 \oplus E_2$. Que dire de $f(E)$? (Le démontrer).

c) Montrer que si f est un isomorphisme de E dans F et si $E = E_1 \oplus E_2$ alors $F = f(E_1) \oplus f(E_2)$.

d) Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F comparer, pour l'inclusion, $(f+g)(E)$ avec $f(E) + g(E)$.

Complément au chapitre A : la préimage dans la catégorie des ensembles quelconques

Exercice 2 (Propriété de cours de la préimage dans le cadre des ensembles quelconques : complément au chapitre **A**)**.** Démontrer toutes les propriétés données en cours : si E et F sont deux ensembles quelconques et f est une application de $E \to F$ alors : a) $\forall\, (B_1, B_2) \in \mathcal{P}(F)^2,\ f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2),\ f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$, et $f^{-1}(F \setminus B_1) = E \setminus f^{-1}(B_1)$

b) Si $A \in \mathcal{P}(E)$, comparer $f^{-1}(f(A))$ et A. Si $B \in \mathcal{P}(F)$, comparer $f(f^{-1}(B))$ et B.

Exercice 3. Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) f est surjective,

b) $\forall\, y \in F,\ f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$,

c) $\forall\ Y \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(Y)) = Y$,

d) le seul $Y \in \mathcal{P}(F)$ tel que $f^{-1}(Y) = \varnothing$ est $\varnothing$.

Donner des équivalences analogues en remplaçant au (a) *surjective* par *injective*.

Exercices dans la catégorie des e.v. avec les A.L.

Exercice 4. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient A et B deux s.e.v. de E. Montrer que $f(A) \subset f(B) \Leftrightarrow A + \ker f \ \subset B + \ker f$.

Exercice 5. a) Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F pouvant être de dim. infinie, vérifie $\dim \ker f$ est finie et F_1 est un s.e.v. de dim. finie, alors $f^{-1}(F_1)$ est un s.e.v. de dim. finie de E qui vérifie :

$$\dim f^{-1}(F_1) = \dim(F_1 \cap \operatorname{Im} f) + \dim \ker f.$$

b) En déduire que $\dim(E) - \dim f^{-1}(F_1) = (\dim(F) - \dim(F_1)) - (\dim(F) - \dim(F_1 + \operatorname{Im}(f))$.

Ce qu'on note aussi $\operatorname{codim}(f^{-1}(F_1)) = \operatorname{codim}(F_1) - \operatorname{codim}(F_1 + \operatorname{Im}(f))$. Donc par préimage la codimension diminue. Elle est conservée quand f est surjectif.

Projecteurs

Exercice 6. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur ssi $\ker(\mathrm{id} - f) \supset \operatorname{Im} f$ ssi $\ker(f) \supset \operatorname{Im}(\mathrm{id} - f)$.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Soient p et q deux projecteurs de E.

Montrer que $p \circ q = p \Leftrightarrow \ker q \subset \ker p$.

Exercice 8. Soit E un e.v. et p et q deux projecteurs de même base F. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha p + (1 - \alpha) q$ est encore un projecteur de même base.

N.B. On appelle parfois (comme ici dans cet exercice) « base » d'un projecteur p le s.e.v. $\operatorname{Im}(p) = Fix(p)$.

Exercice 9. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Montrer que $\ker(g) \oplus \operatorname{Im}(f) = F$.