

Chap. G1 : Algèbre linéaire, applications linéaires

I Propriétés générales et exemples

1) Autour de la définition :

a) Définition d'une application linéaire

(i) Déf. Soient E et F deux K -e.v. et $f : E \rightarrow F$. On dit que f est une application linéaire de E dans F (ou une application K -linéaire si on veut insister sur le corps des scalaires, qui est le même pour E et F) si, et seulement si,

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in K^2, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

(ii) Notation : On note $\mathcal{L}_K(E, F)$ (ou $\mathcal{L}(E, F)$ si le corps de base est sous-entendu) l'ensemble des A.L. de E dans F .

b) Exemples d'applications linéaires dans $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

(i) Les "fonctions linéaires" de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a.x$ est linéaire. Mieux ce sont les *seules* applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(ii) Les deux projections de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R} : p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$ et $p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y$ sont deux applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Question : Idée de la forme générale d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?

c) Exemple de l'importance du corps des scalaires :

(i) Exemple : la conjugaison de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$ -linéaire mais pas $\mathbb{C}$ -linéaire.

Preuve : Notons $c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$. On sait que c est un morphisme de corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$ dans lui-même, en particulier c'est un morphisme pour $+$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, alors $c(\lambda z) = \overline{\lambda z} = \bar{\lambda} \bar{z} = \lambda \bar{z}$ car $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ceci montre que $c(\lambda z) = \lambda c(z)$ et donc que c est bien $\mathbb{R}$ -linéaire.

En revanche pour $z \neq 0$ et $\lambda = i \in \mathbb{C}$, on a $c(iz) = -ic(z) \neq ic(z)$, donc c n'est pas $\mathbb{C}$ -linéaire.

(ii) En revanche si E et F sont deux $\mathbb{C}$ -e.v. toute application $\mathbb{C}$ -linéaire de E dans F est $\mathbb{R}$ -linéaire (restriction des scalaires).

Preuve : Si on a E et F deux $\mathbb{C}$ -e.v. et $f : E \rightarrow F$ linéaire, alors $\forall u \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, on a $f(\lambda u) = \lambda f(u)$, en particulier on a cette propriété pour tous les $\lambda \in \mathbb{R}$. □

d) Exemples d'applications linéaires déjà rencontrées en analyse

Dans ce qui suit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(i) La dérivation $D : \mathcal{D}(I, K) \rightarrow \mathcal{F}(I, K)$ est K -linéaire.

(ii) L'intégration entre deux bornes fixes $I_{a,b} : \mathcal{C}([a, b], K) \rightarrow K$, est K -linéaire.

(iii) L'évaluation en un point : si $a \in I$, l'application $ev_a : \mathcal{F}(I, K) \rightarrow K, f \mapsto f(a)$ est K -linéaire.

2) Noyau d'une application linéaire :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux K -e.v. quelconques.

a) Définition : Soient E et F deux K -e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

(i) On appelle *noyau* de f , noté $\text{Ker}(f)$ l'ensemble :

$$\text{Ker} f = \{x \in E, f(x) = 0_F\}.$$

(ii) Exemples de $\text{Ker} p_1, \text{Ker} D, \text{Ker} ev_a$ avec les notations ci-dessus.

(iii) Prop. *dém.* $\text{Ker}(f)$ est un s.e.v. de E .

b) Caractérisation de l'injectivité :

(i) Prop. *dém.* f est injective si, et seulement si, $\text{Ker} f = \{0_E\}$.

c) Généralisation à l'image d'une famille :

(i) Rem. si $\mathcal{G} = (u_1, \dots, u_m)$ est une famille liée de E alors $f(\mathcal{G}) = (f(u_1), \dots, f(u_m))$ est une famille liée de F .

(ii) Prop. si f est *injective* et si $\mathcal{G}$ est une famille libre alors $f(\mathcal{G})$ est une famille libre.

3) Image d'une application linéaire :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux K -e.v. quelconques.

a) (i) Déf. $\text{On note } \text{Im } f \text{ le sous-ensemble } f(E) \text{ de } F.$

(ii) Exemple si $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, 0)$, alors $\text{Im } \pi =$

(iii) Rappel chap. A3 (working-déf). Soit $y \in F, y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow$

b) (i) Prop. *dém.* $\text{Im}(f)$ est toujours un s.e.v de F .

(ii) Prop. *dém.* si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E alors $f(\mathcal{G})$ est génératrice de $\text{Im}(f)$.

(iii) En particulier si f est surjective, que dire alors l'image d'une famille génératrice de E ?

4) Des applications linéaires géométriquement cruciales, présentes dans tous les e.v.

a) Homothétie de rapport $\lambda \in K$:

(i) Déf. Soit E un K -e.v. et $\lambda \in K$. On définit l'homothétie (vectorielle) h_λ de rapport λ comme l'application $h_\lambda : E \rightarrow E, x \mapsto \lambda x$.

Autrement dit $h_\lambda = \lambda \text{id}_E$.

N.B. La différence avec le chapitre C2 : il n'y plus de « centre ». En fait le centre est 0. Au C2, c'était des homothéties « affines ».

(ii) Prop. *générale des applications linéaires (dém.)* si E est un K -e.v., si $f \in \mathcal{L}(E)$ et si $D \subset E$ est une droite vectorielle *stable par f* (i.e. $f(D) \subset D$) alors $f|_D$ est une *homothétie*.

Rem. : ce résultat s'applique en particulier si $E = D$ est une droite vectorielle !

On retrouve le fait que les seules applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les homothéties : $f : x \mapsto a.x$ avec a fixé.

(iii) Prop. *Le miracle des homothéties : à redémontrer à chaque fois car pas un résultat de cours* Si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\forall x \in E, f(x)$ et x sont liés alors f est une homothétie.

Comprendre le pb. d'inversion des quantificateurs ! Savoir refaire la dém.

Reformulation du miracle : si f laisse stable toutes les droites de E alors f est un homothétie.

(iv) Version contraposée du miracle des homothétie : si $f \in \mathcal{L}(E)$ n'est pas une homothétie, alors il existe un $x \in E$ tel que $(x, f(x))$ libre.

(v) Prop. Si h est une homothétie : pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on a $h \circ f = f \circ h$.

b) Projecteur associé à une décomposition $E = F \oplus G$

(i) Déf. Soit E un K -e.v. et F et G deux s.e.v de E tels que $E = F \oplus G$. Par déf. le projecteur sur F parallèlement à G est l'application $p : E \rightarrow E, x = x_F + x_G \mapsto x_F$.

(ii) Prop. Avec les notations du (i) on a : $F = \text{Im}(f) = \text{Fix}(f), G = \text{Ker } f$.

(iii) Prop. (caract. géométrique des projecteurs). *dém.* Soit E un K -e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$ quelconque. On a l'équivalence :

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Fix}(f) \text{ ssi } f \text{ est un projecteur.}$$

(iv) Caractérisation algébrique des projecteurs (*dém.*)

$$\text{Soit } f \in \mathcal{L}(E). \text{ Alors } f \text{ est un projecteur ssi } f \circ f = f.$$

(v) Lien entre les deux projecteurs associés à une décomposition : si p_1 est le projecteur sur F parallèlement à G et p_2 est le projecteur sur G parallèlement sur F , alors $p_1 + p_2 = \text{id}_E$.

c) Symétrie associée à la même décomposition $E = F \oplus G$.

On suppose dans ce paragraphe que, dans $K, 2.1_K \neq 0_K$.

(i) Déf. Soit E un K -e.v. et F et G deux s.e.v de E tels que $E = F \oplus G$. Par déf. la symétrie d'axe F parallèlement à G est l'application $s : E \rightarrow E, x = x_F + x_G \mapsto x_F - x_G$.

(ii) Prop. si s est comme au (i) alors $F = \text{Fix}(f)$ et $G = \text{«Anti-fix»}(f)$.

(iii) Prop. *caract. géométrique* soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f symétrie ssi $E = \text{Fix}(f) \oplus \text{«Anti-fix»}(f)$.

(iv) *Caractérisation algébrique* Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un K -e.v

Alors f est une symétrie ssi $f^2 = \text{id}$.

(v) Lien entre s et p . (*savoir le trouver algéb. mais aussi le voir sur un dessin !*).

5) Notion de préimage (ou image réciproque) d'un ensemble par une application

- a) Pour les applications entre ensembles qcq (aurait pu figurer au chap. A3).

Ici E et F sont des ensembles qcq. (chap. A) et $f : E \rightarrow F$ (penser à des patates).

- i) Déf. la préimage $f^{-1}(B)$ d'un sous-ensemble B de F est l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) \in B$.

Working-déf. : $\forall x \in E, x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

- ii) Mise en garde : dans la déf. préc. f n'est pas supposée bijective, l'appl. f^{-1} n'existe pas !

- iii) Exemples : notation $f^{-1}(\{b\})$ pour les singletons.

- iv) Propriétés remarquables de la préimage pour $\cup, \cap$ et complémentaires : cf. pl.

- b) Cas particulier des applications linéaires :

- i) Un exemple important : $\text{Ker } f = f^{-1}(\{0_F\})$.

- ii) Prop. la préimage d'un s.e.v. par une A.L. est un s.e.v.

- iii) Exercice : si $F_1 = f(E_1)$ alors $f^{-1}(F_1) = E_1 + \text{Ker } f$.

II Applications linéaires en dim. finie

1) Première prop. fondamentale des appl. lin. en dim. finie : codage par une matrice

- a) Soit E est un K -e.v. de dim. finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E . Soit F un K -e.v. quelconque.

P1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si on connaît $f(e_1), \dots, f(e_n)$ alors f est entièrement déterminée.

P2 : Si on fixe une famille arbitraire $v_1, \dots, v_n$ d'éléments de F , il existe une A.L. $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(e_i) = v_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Cette A.L. est alors unique par (P1).

- b) Si $\mathcal{B}$ base de E , et $v \in E$, notation $[v]_{\mathcal{B}} = X$ où X est le vecteur colonne des coord. de v .

Si $\mathcal{B}$ base de E et $\mathcal{C}$ base de F , déf. *matrice de f relativement à ces bases*, deux notations : $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f)$ ou $[f]_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = A$ avec d'abord la base d'arrivée, puis la base de départ.

Attention : dans le programme, on trouve la notation $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$, qui est une notation beaucoup plus maladroite en pratique, comme on le verra plus loin pour les formules de produits et de changement de bases, mais il faut s'adapter aux énoncés !

Les $f(e_j)$ écrits dans la base $\mathcal{C}$ forment les colonnes de A . Exemples.

Convention LICO pour les indices de la matrice $A = (a_{i,j})$ et pour l'ensemble $M_{m,n}(K)$.

- c) Calcul matriciel de $f(x)$ comme $A.X$, où X est le vecteur colonne représentant x dans $\mathcal{B}$. Exemples.

- d) Conséquence : forme de toutes les applications linéaires par exemple de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, x_2) \mapsto (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2).$$

Savoir faire : obtenir la matrice à partir de l'écriture en coordonnées.

Avec la déf. : on l'obtient colonne par colonne.

Avec la prop. du c) : on la lit directement ligne par ligne.

- e) Cas particulier des endomorphismes, même base au départ et à l'arrivée, matrice carrée.

2) Illustration

- a) Pour f donné par sa matrice M , le calcul de $\text{Ker } f$ se fait en résolvant $MX = 0$. Exemple. On obtient des *équations de $\text{Ker } f$* .

- b) Une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ se voit sur les colonnes de $\text{Mat}(f)$.

- c) Un lien entre ces vecteurs donne aussi un élément de $\text{Ker}(f)$ exemple de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

- d) Exemple de recherche de $\text{Ker } f$ et $\text{Fix}(f)$ sur la matrice $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit

que f est un projecteur.

e) Ecriture de la matrice d'un projecteur, d'une symétrie, *dans une base adaptée* et d'une homothétie dans toute base.

3) Rang d'une famille de vecteurs, manip. matricielle : revoir chap. D

- a) Déf. : Rang d'une famille de vecteur : $\text{rg}(v_1, \dots, v_k) \stackrel{\text{def}}{=} \dim \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$.
- b) Les trois opérations suivantes ne modifient pas l'e.v. $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ et en particulier le rang.
- Echanger deux vecteurs, ce qu'on note $v_i \leftrightarrow v_j$
 - Multiplier un vecteur par un scalaire non nul, ce qu'on note $v_i \leftarrow \lambda v_i$.
 - Ajouter à un vecteur une C.L. des autres vecteurs : $v_i \leftarrow v_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k v_k$.
- c) Déf. $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_k) \in M_{n,k}(K)$: cette fois la matrice code simplement une famille de vecteurs. On parle alors aussi du rang de A , noté $\text{rg}(A)$ pour $\text{rg}(v_1, \dots, v_k)$.
- d) Exemple où l'on conduit les opérations du pivot du b) pour trouver le rang de la famille de vecteurs. Les matrices obtenues successivement sont dites (terminologie non standard) r -équivalentes.
- e) Déf. : une matrice est dite *échelonnée en colonnes* si, en appelant *pivot* d'une colonne la première entrée non nulle d'une colonne (qui n'est pas la colonne nulle) le pivot d'une colonne est toujours strictement plus haut que celui de la colonne suivante, jusqu'à ce qu'on n'ait plus que des colonnes nulles (éventuellement).
- Prop. évidente : le rang d'une telle matrice est alors le nombre de colonnes non nulles.
- Exemples.
- f) Prop. (vérifiée dans la pratique, se démontrerait par réc.) Par les opérations du b) sur les colonnes de A , on arrive toujours à obtenir une matrice A' , *échelonnée en colonne*.

4) Deuxième propriété fondamentale d'une A.L. en dim. finie : le théorème du rang

- a) **Rang d'une application linéaire.**
- (i) Déf. $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f)$, bien défini dès que $f : E \rightarrow F$ avec $\dim(E)$ finie, car, dans ce cas :
- (ii) $\text{rg}(f)$ est aussi le rang de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n)) = f(\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est une base de E . Si F est aussi de dim. finie, et $\mathcal{C}$ en est une base, $\text{rg}(f)$ est donc aussi le rang des colonnes de la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f)$, et suivant 3) c), on parle aussi du rang de la matrice A .
- (iii) Rem. Si E et F sont de dim. finie, $\text{rg}(f) \leq \min(\dim E, \dim F)$.
- (iv) Caract. f surjective ssi $\text{rg}(f) = \dim F$, f injective ssi $\text{rg}(f) = \dim E$.
- b) **Théorème du rang.**
- Hyp. : $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dim. finie.
- Concl. : $\text{rg}(f) + \dim \text{Ker } f = \dim E$.
- c) **Premier exemple d'application concrète :**
- Détermination pratique du noyau et de l'image d'une AL donnée par sa matrice : presque à l'oeil nu !
- Exemple de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
- d) **Attention** – L'égalité $\dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim E$ ne suffit pas pour que le noyau et l'image d'un endomorphisme soient supplémentaires !
- On n'a pas nécessairement $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$, on peut même avoir $\text{Im } f = \text{Ker } f$: exemple $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $f(e_1) = e_2, f(e_2) = 0$, f est un endomorphisme *nilpotent*, matrice de f .
- e) **Preuve du théorème du rang (à bien connaître) :**
- (i) Lemme clef : retenir que si E_1 est un supplémentaire de $\text{Ker } f$ alors $f|_{E_1} : E_1 \rightarrow \text{Im } f$ est un isomorphisme.
- (ii) Le lemme clef entraîne immédiatement le théorème du rang, mais en outre l'idée supplémentaire donnée par ce lemme est importante.

(iii) Rem. utile : si E_1 est un s.e.v. qcq. de E alors $\text{Ker}(f|_{E_1}) = E_1 \cap \text{Ker} f$. En part. retenir qu'en se restreignant à un suppl. du noyau, on devient toujours injectif.

f) **Appl. du théorème du rang :**

Prop. si E et F sont de même dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors f est injective ssi f est surjective ssi f est bijective. **N.B.** – On utilisera ce résultat surtout pour les *endomorphismes* : bien noter dans ce cas les deux conditions : *endomorphisme* et *dim. finie*!

III Sur la structure des ensembles d'applications linéaires :

1) Structure d'e.v. de $\mathcal{L}_K(E, F)$

a) Espace vectoriel $\mathcal{F}(A, F)$ où F est un e.v. qcq

(i) On a dit au chapitre D que si A est un ensemble qcq. non vide et K est un corps alors $\mathcal{F}(A, K)$ est un K -e.v. de référence. L'important pour ajouter deux applications f et g , ou les multiplier par un scalaire, et que ces opérations soient possibles dans l'ensemble d'arrivée. Mais alors, on peut généraliser l'énoncé du D comme suit :

(ii) **Déf.** Soit F un K -e.v. et A un ensemble quelconque non vide, on définit alors une l.c.i. notée $+$ dans $\mathcal{F}(A, F)$ par $\forall (f, g) \in \mathcal{F}(A, F)^2, f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$, et une l.c.e. notée $\cdot$ de $K \times \mathcal{F}(A, F)$ dans $\mathcal{F}(A, F)$ par $\forall \lambda \in K, \forall f \in \mathcal{F}(A, F), (\lambda \cdot f) : x \mapsto \lambda \cdot f(x)$.

(iii) **Prop.** Avec les notations du (ii), $\mathcal{F}(A, F)$ est un K -e.v.

Preuve : Exercice : on doit tout vérifier car on ne peut le voir comme s.e.v. de qq. ch., mais la preuve est la même qu'au chap. D. □

Pour nous, les $\mathcal{F}(A, F)$ seront désormais des e.v. de réf. qui élargissent la famille précédente des $\mathcal{F}(A, K)$.

b) Le cas de $\mathcal{L}(E, F)$

(i) **Prop.** Soient E et F deux K -e.v. Alors l'ensemble $\mathcal{L}_K(E, F)$, muni des lois définies au (a) est lui-même un K -espace vectoriel.

Preuve – Par a), il suffit de vérifier que $\mathcal{L}_K(E, F)$ est un s.e.v. de $\mathcal{F}(E, F)$ (e.v. de réf.). Deux propriétés :

- l'application nulle est bien linéaire.
- Soient $(f, g) \in \mathcal{L}_K(E, F)^2$, soient $(\lambda, \mu) \in K^2$. On note $h = \lambda f + \mu g$. On veut montrer que h est linéaire.

Or soit $(u, v) \in E^2$ et soit $(\alpha, \beta) \in K^2$.

On veut montrer que $h(\alpha u + \beta v) = \alpha h(u) + \beta h(v)$ (C).

Or en posant $w = \alpha u + \beta v$, $h(w) = (\lambda f + \mu g)(w) = \lambda f(w) + \mu g(w)$ par déf. des lois dans $\mathcal{F}(E, F)$.

Donc $h(w) = \lambda f(\alpha u + \beta v) + \mu g(\alpha u + \beta v)$

Comme f et g sont linéaires, on conclut que $h(w) = \lambda[\alpha f(u) + \beta f(v)] + \mu[\alpha g(u) + \beta g(v)]$.

En regroupant les termes autrement, on en déduit que :

$h(w) = \alpha(\lambda f(u) + \mu g(u)) + \beta(\lambda f(v) + \mu g(v)) = \alpha h(u) + \beta h(v)$ i.e. la conclusion (C).

On conclut bien que $\mathcal{L}_K(E, F)$ est un s.e.v. de $\mathcal{F}(E, F)$. □

2) Structure pour la composition :

a) Composition d'A.L. entre espaces quelconques

(i) **Prop.** La composée de deux A.L. est une A.L.
 Énoncé précis : soient E, F, G trois e.v. sur le même corps K . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Preuve – Soit $(u, v) \in E^2$. Soit $(\lambda, \mu) \in K^2$. Alors :

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\lambda u + \mu v) &= g(f(\lambda u + \mu v)) = g(\lambda f(u) + \mu f(v)) \quad \text{car } f \text{ est linéaire,} \\ &= \lambda g(f(u)) + \mu g(f(v)), \quad \text{car } g \text{ est linéaire.} \quad \square \end{aligned}$$

(ii) **Notation et terminologie :** Si $E = F$, on note $\mathcal{L}(E)$ plutôt que $\mathcal{L}(E, E)$. Les éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui sont donc des morphismes d'e.v. de E dans lui-même sont appelés des *endomorphismes* de l'e.v. E . (De “endo” rester dedans).

(iii) Par (i), on en déduit que $\circ$ est une l.c.i. de $\mathcal{L}(E)$ qui est aussi associative (associative de $\circ$ très générale) avec neutre id_E (qui est bien une A.L.)

b) Structure d'anneau sur $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$

(i) **Rappel du C1 :** On dit que $(A, +, *)$ est un anneau ssi les trois ensembles d'axiomes suivants sont vérifiés :

- (1) $(A, +)$ est un groupe abélien,
- (2) $*$ est une l.c.i. de A , associative, avec neutre,
- (3) la loi $*$ est *distributive* par rapport à $+$, ce qui, dans le cas où $*$ n'est pas commutative demande les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\forall (a, b, c) \in A^3, a * (b + c) &= a * b + a * c, \\ (b + c) * a &= b * a + c * a.\end{aligned}$$

Si en outre $*$ est commutative, on dit que $(A, +, *)$ est un anneau commutatif.

(ii) **Rappel du C1 :** Au C1, on n'a pas donné d'exemple d'anneau non commutatif.

Revoir le pb. de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \circ)$ qui n'est pas un anneau :(une des deux distrib. manque).

En voici enfin des anneaux non commutatifs :

(iii) **Prop.** $(\mathcal{L}_K(E), +, \circ)$ est un anneau.

Preuve – On passe en revue les axiomes du (i) :

(1) $(\mathcal{L}(E), +)$ est un groupe abélien, puisqu'on a vu que $\mathcal{L}(E)$ était un e.v.

(2) $\circ$ est une l.c.i. de $\mathcal{L}(E)$, comme on l'a montré au paragraphe précédent, associative, avec neutre, il ne reste plus qu'à vérifier les deux égalités de distributivité.

Soit $(f, g, h) \in \mathcal{L}(E)^3$. On veut montrer que
$$\begin{cases} f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h) & (E_1) \\ (g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f & (E_2) \end{cases}.$$

(E_2) est vraie pour toutes les appl. de E dans E , mais (E_1) utilise la linéarité de f (plus exactement le fait que f est un morphisme pour $+$).

□

(iv) Scholie : Dire que $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, c'est dire qu'on peut faire aussi du "calcul" dans cet anneau. On l'a déjà fait dans des exercices par exemple sur les projecteurs cf. pl.

3) Isomorphismes et automorphismes :

a) Déf. (rappel) Soient E et F deux K -e.v. On dit que $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme d'e.v. ssi f est bijective, f est linéaire et f^{-1} est linéaire. La dernière propriété est en fait automatique.

(ii) On note $\mathcal{I}som(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F .

Attention : il n'est pas stable par $+$.

(iii) **Terminologie :** Dans le cas où $E = F$, les isomorphismes de E dans E s'appellent les *automorphismes* de E .

b) Le groupe linéaire :

Prop. L'ensemble de tous les automorphismes de E est un groupe pour la loi $\circ$, appelé le *groupe linéaire* de E et noté $GL(E, \circ)$.

Preuve – On montre que $GL(E)$ est un sous-groupe de $(Bij(E), \circ)$ où $Bij(E)$ désigne l'ensemble des bijections de E dans E .

Or id_E est linéaire, la composée d'A.L. est linéaire, et la récip. d'une A.L. est linéaire. □

Synthèse du lexique :

- (homo)-morphisme d'e.v. : A.L.
- endomorphisme d'e.v. : va de E dans lui-même.
- isomorphisme : morphisme bij.
- automorphisme : iso+ endo.

Synthèse pour les structures :

- Structure d'anneau pour l'ensemble des endo. avec $+$, $\circ$
- Structure de groupe pour l'ensemble des auto. avec $\circ$.