

D.M. 14 : propriétés des endomorphismes cycliques, solutions

Partie I

1) a) Montrons que $C(S)$ est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$.

(i) $C(S)$ contient l'application $0 \in \mathcal{L}(E)$ de manière évidente

(ii) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et $(g_1, g_2) \in C(S)^2$.

Alors pour tout $f \in S$, par bilinéarité de la composition : $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \circ f = \lambda_1 (g_1 \circ f) + \lambda_2 (g_2 \circ f) = \lambda_1 (f \circ g_1) + \lambda_2 (f \circ g_2)$ car g_1 et g_2 sont dans S .

En regroupant, on obtient bien que $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \circ f = f \circ (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)$.

Donc $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \in C(S)$.

Avec (i) et (ii) on a montré que $C(S)$ est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrons que $C(S)$ est un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$.

(i) Comme on sait déjà que $C(S)$ est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$, en part. c'est un sous-groupe de $(\mathcal{L}(E), +)$.

(ii) On sait que : $\text{id}_E \in C(S)$.

(iii) Reste à montrer que $C(S)$ est stable par $\circ$:

Soit $(g_1, g_2) \in C(S)^2$. Soit $f \in S$.

Alors $(g_1 \circ g_2) \circ f = g_1 \circ (g_2 \circ f) \stackrel{(1)}{=} g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 \stackrel{(2)}{=} (f \circ g_1) \circ g_2 = f \circ (g_1 \circ g_2)$.

Notons que (1) et (2) sont vraies car prop. $g_1 \in C(S)$ et $g_2 \in C(S)$.

D'où la conclusion $g_1 \circ g_2 \in C(S)$.

Avec (i), (ii), (iii), on a montré que $C(S)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.

c) Au total : $C(S)$ est une sous-algèbre de $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$.

2) D'une manière évidente $f \in C(f)$.

Idee : En fait le fait que $C(f)$ soit une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant f suffit pour montrer que $\mathbb{K}[f] \subset C(f)$ car $\mathbb{K}[f]$ est la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant f .

Nous allons néanmoins détailler cette inclusion.

Comme $C(f)$ est stable par $\circ$, et contient f , alors par récurrence immédiate pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k \in C(f)$.

Comme $\text{id} \in C(f)$ on a aussi $f^0 \in C(f)$.

Ensuite comme $C(f)$ est stable par C.L., on en déduit que pour tout $(a_n, \dots, a_0) \in \mathbb{K}^{n+1}$, $a_n f^n + \dots + a_1 f + a_0 \text{id} \in C(f)$.

Donc $\mathbb{K}[f] \subset C(f)$.

Partie II

3) a) Soit $n = \dim E$. On sait que dans E toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée. Donc $(v, f(v), \dots, f^n(v))$ est liée.

On peut donc considérer $A = \{k \in \mathbb{N} \mid (v, f(v), \dots, f^{k-1}(v)) \text{ est libre}\}$. Alors

(i) Le fait que la famille $(f^k(v))_{n \leq N}$ soit génératrice de E entraîne que $v \neq 0$. Donc la famille (v) est libre. Ainsi $0 \in A$ et ainsi A est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$.

(iii) A est majoré par $n + 1$.

Donc A admet un plus grand élément qu'on appelle p .

b) (i) Par déf. de p , $(v, f(v), \dots, f^{p-1}(v))$ est libre et $(v, f(v), \dots, f^p(v))$ est liée.

Donc il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \neq (0, \dots, 0)$ tels que $\alpha_0 v + \alpha_1 f(v) + \dots + \alpha_p f^p(v) = 0$ (*).

Par l'absurde si $\alpha_p = 0$ alors (*) deviendrait $\alpha_0 v + \alpha_1 f(v) + \dots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(v) = 0$ avec $(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}) \neq (0, \dots, 0)$ ce qui donnerait une contradiction avec $(v, f(v), \dots, f^{p-1}(v))$ libre.

Donc $\alpha_p \neq 0$ et en divisant par α_p dans (*), et en faisant passer $f^p(v)$ de l'autre côté, on obtient que :

$$f^p(v) \in \text{Vect}(v, f(v), \dots, f^{p-1}(v)).$$

(ii) Montrons par récurrence que pour tout $k \geq p$, $f^k(v) \in \text{Vect}(v, f(v), \dots, f^{p-1}(v))$.

• La récurrence est initialisée par le (i).

• H.R. on suppose que pour un certain $k \geq p$, on a $f^k(v) \in \text{Vect}(v, f(v), \dots, f^{p-1}(v))$ donc il existe $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tels que :

$$f^k(v) = a_0v + \dots + a_{p-1}f^{p-1}(v).$$

Alors en appliquant f , linéaire, à cette égalité, on obtient $f^{k+1}(v) = a_0f(v) + \dots + a_{p-2}f^{p-1}(v) + a_{p-1}f^p(v)$.

Mais par l'initialisation $f^p(v) \in \text{Vect}(v, f(v), \dots, f^{p-1}(v))$ donc $f^{k+1}(v) \in \text{Vect}(v, f(v), \dots, f^{p-1}(v))$.

La réc. est établie.

c) Le b) montre que $\text{Vect}((f^k(v))_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}) = \text{Vect}(f^k(v))_{k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket}$.

Donc la famille $\mathcal{F}_p$ est génératrice de E par déf. de N et libre par déf. de p , donc c'est une base de E .

On conclut aussi que $p = n$.

d) On note $\mathcal{B} = (v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$

en notant $f^n(v) = a_0v + a_1f(v) + \dots + a_{n-1}f^{n-1}(v)$.

4) Si v est un vecteur totalisateur pour f alors $(f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ est une famille libre de vecteur dans $\text{Im } f$ donc $\dim \text{Im } f \geq n - 1$.

5) On redémontre le miracle des homothéties : $f \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie si, et seulement si, pour tout $v \in E$, $(v, f(v))$ est liée (à faire!).

Donc si f n'est pas une homothétie, il existe un $v \in E$ tel que $(v, f(v))$ est libre. Donc comme $n = 2$ ici, on conclut bien que v est totalisateur pour f .

6) a) Comme $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ est une base de E et que $g(v) \in E$, cette question est évidente : le vecteur $g(v) \in E$ s'écrit bien dans cette base comme C.L. de $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$.

b) On va montrer que $g = h$ en montrant que ces deux endomorphismes coïncident pour chaque vecteur de la base $\mathcal{B} = (v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$.

Montrons que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$: $h(f^k(v)) = g(f^k(v))$.

La propriété est vraie pour $k = 0$ par a) mais le raisonnement suivant s'applique pour tout k .

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $g(f^k(v)) = f^k(g(v))$ car $g \in C(f)$.

Donc $g(f^k(v)) = f^k(a_0v + \dots + a_{n-1}f^{n-1}(v)) = a_0f^k(v) + a_1f^{k+1}(v) + \dots + a_{n-1}f^{n-1+k}(v) = h(f^k(v))$.

Ainsi les endo. g et h coïncident sur une base de E , donc sont égaux.

c) Par b) si $g \in C(f)$, on a bien $g \in \mathbb{K}[f]$ d'où l'inclusion $C(f) \subset \mathbb{K}[f]$.

L'autre inclusion a été vue au 2) donc $C(f) = \mathbb{K}[f]$.

De plus : le 3) b), montre que $(\text{id}, f, \dots, f^{n-1})$ est une famille génératrice de $C(f) = \mathbb{K}[f]$.

Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\lambda_0 \text{id} + \dots + \lambda_{n-1}f^{n-1} = 0$.

On applique cette identité de fonctions au vecteur v : on obtient $\lambda_0v + \dots + \lambda_{n-1}f^{n-1}(v) = 0$ ce qui donne $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ par $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ libre.

Donc $(\text{id}, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathbb{K}[f]$, donc $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[f] = n$.

Partie III 7) Soit donc $\varphi : M \in TS_n(\mathbb{K}) \mapsto TM - MT \in TS_n(\mathbb{K})$.

On sait que tout M et T triangulaires supérieures, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$(MT)_{i,i} = m_{i,i}t_{i,i} = (TM)_{i,i}.$$

Donc $(MT - TM)_{i,i} = 0$.

Donc pour tout $M \in TS_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M)$ a toutes ses entrées diagonales nulles, donc :

$$\varphi(M) \in TSS_n(\mathbb{K}).$$

Ainsi, $\text{Im } \varphi \subset TSS_n(\mathbb{K})$ (*)

Or par théorème du rang appliqué à $\varphi : TS_n(\mathbb{K}) \rightarrow TS_n(\mathbb{K})$:

$$\dim TS_n(\mathbb{K}) = \dim \ker(\varphi) + \dim \text{Im}(\varphi).$$

Ainsi $\dim \ker(\varphi) = \dim TS_n(\mathbb{K}) - \dim \text{Im}(\varphi) \underset{\text{par (*)}}{\geq} \dim TS_n(\mathbb{K}) - \dim TSS_n(\mathbb{K}) = n$.

Or $\ker(\varphi) = C(T) \cap TS_n(\mathbb{K})$, donc $C(T) \subset \ker(\varphi)$ et donc on vient bien de montrer que $\dim C(T) \geq n$.

8) Analyse : soit $A \in C(TSS_n(\mathbb{K}))$

Alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i < j$, on sait que $A.E_{i,j} = E_{i,j}.A$.

$$\text{Or } AE_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{i,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{1,n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ la colonne spéciale étant la colonne numéro } j.$$

$$\text{Et } E_{i,j}.A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,j} & \dots & a_{j,n} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ la ligne spéciale étant la ligne } i \text{ (matrice de même}$$

taille même si le schéma semble la faire plus grosse).

Ainsi l'égalité $AE_{i,j} = E_{i,j}.A$ pour tout $i < j$ donne que pour tout $i < j$, $a_{i,i} = a_{j,j}$ (égalité des entrées (i, j) de $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}.A$), donc toutes les entrées diagonales de A sont égales.

En outre pour tout $1 \leq i < j \leq n$ et tout $k \neq i$, $a_{k,i} = 0$ et tout $k \neq j$, $a_{j,k} = 0$.

Donc pour tout $i = 1, \dots, n-1$, et $k \neq i$, $a_{k,i} = 0$ donc toutes les entrées non diagonales des colonnes $C_1, \dots, C_{n-1}$ de A sont nulles.

De même pour tout $j = 2, \dots, n-1$ et $k \neq j$, $a_{j,k} = 0$ donc toutes les entrées non diagonales des lignes $L_2, \dots, L_n$ sont nulles.

Donc toutes les entrées non diagonales de A sont nulles sauf éventuellement l'entrée $(1, n)$.

On vient de montrer que si $A \in C(TSS_n(\mathbb{K}))$ alors $A = \lambda I + \mu E_{1,n}$.

Réciproque : montrons que tous les $A = \lambda I + \mu E_{1,n}$ sont dans $C(TSS_n(\mathbb{K}))$.

Comme I est dans $C(TSS_n(\mathbb{K}))$ et que ce commutant est un s.e.v., la seule chose à montrer est que $E_{1,n} \in C(TSS_n(\mathbb{K}))$.

Or par propagation des rangées de zéros, pour tout $A \in TSS_n(\mathbb{K})$, $A.E_{1,n} = 0$ et $E_{1,n}.A = 0$.

Donc $E_{1,n} \in C(TSS_n(\mathbb{K}))$ et la conclusion :

$$C(TSS_n(\mathbb{K})) = \text{Vect}(I_n, E_{1,n}).$$

9) a) Par déf. de E_λ pour tout $x \in E_\lambda$, $f(x) - \lambda x = 0$.

Donc pour tout $x \in E_\lambda$, $f(x) = \lambda x$.

Donc $f|_{E_\lambda}$ est l'homothétie de rapport λ .

b) Soit $\lambda \neq \mu$ et $x \in E_\lambda \cap E_\mu$.

Alors $f(x) = \lambda x$ et $f(x) = \mu x$ donc $\lambda x = \mu x$ donc $x(\lambda - \mu) = 0$.

Comme $\lambda - \mu \neq 0$, on conclut que $x = 0$. D'où la conclusion $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$.

c) Idée géométrique : considérons pour f une rotation vectorielle d'angle $\theta \in]0, \pi[$.

Alors pour tout v non nul, $f(v)$ fait un angle $\theta \in]0, \pi[$ avec v , donc $f(v)$ et v ne sont pas colinéaire.

Pour simplifier, on va prendre $\theta = \pi/2$ soit $f : e_1 \mapsto e_2, e_2 \mapsto -e_1$ (ce qui évite de parler de rotation ici).

Comme $f^2 = -\text{id}$, si on avait un vecteur propre v tel que $f(v) = \lambda v$ on aurait $f^2(v) = \lambda^2 v$ et d'autre part $f^2(v) = -v$ donc avec $v \neq 0$, $\lambda^2 = -1$ impossible.

10) Soit E_λ un s.e.v propre de f .

Soit $g \in C(f)$. Alors g commute aussi à $f_\lambda = f - \lambda \text{id}$.

Or on a montré en exercice (refaire!) que si g commute avec un endomorphisme h alors $\ker(h)$ est stable par g .

Donc ici $\ker(f - \lambda \text{id})$ est stable par g .

11) Avec les notations de l'énoncé, $g \in C(f)$ ssi $E_0(f)$ et $E_1(f)$ sont stables par f .

Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = E_0(f) \oplus E_1(f)$. Alors $g \in C(f)$ ssi

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où A est carrée de taille $\dim E_0(f)$ et B carrée de taille $\dim E_1(f)$.

Donc $\dim C(f)$ est la dim. de l'e.v. des matrices de la forme précédente. Notons $\mathcal{C}$ cet e.v.

En notant $r = \dim E_1(f) = \text{rg}(f)$, l'application de $M_{n-r}(\mathbb{K}) \times M_r(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{C}$, $(A, B) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

est un isomorphisme d'e.v. donc :

$$\dim C(f) = (n - r)^2 + r^2.$$

12) Soit f une symétrie. Alors $E = E_1(f) \oplus E_{-1}(f)$ où $E_1(f) = \text{Fix}(f)$ et $E_{-1} = A\text{Fix}(f)$

a) Montrons de même que $g \in C(f)$ ssi $E_1(f)$ et E_{-1} sont stables par g .

Sens $\Rightarrow$: donné par le 10).

Sens $\Leftarrow$: on suppose donc que E_1 et E_{-1} sont stables par g .

Soit $x \in E$ quelconque, on peut l'écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_{-1}$.

Montrons que $f(g(x)) = g(f(x))$.

D'un côté $g(f(x)) = g(x_1 - x_2) = g(x_1) - g(x_2)$ (1).

De l'autre côté $f(g(x)) = f(g(x_1)) + f(g(x_2))$. Mais comme $g(x_1) \in E_1$, $f(g(x_1)) = g(x_1)$ et comme $g(x_2) \in E_{-1}$, $f(g(x_2)) = -g(x_2)$.

Ainsi. $f(g(x)) = g(x_1) - g(x_2)$ (2).

En comparant (1) et (2), on a bien montré que $f \circ g = g \circ f$.

b) On en déduit de même que matriciellement, dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = E_1(f) \oplus E_{-1}(f)$, on a l'équivalence : $g \in C(f) \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et que $\dim C(f) = s^2 + (n - s)^2$ où $s = \dim E_1(f)$.

c) Si f est une symétrie alors $f^2 = \text{id}$, donc $\mathbb{K}[f] = \text{Vect}(\text{id}, f)$.

Donc $\dim \mathbb{K}[f] \leq 2$. En fait $\dim \mathbb{K}[f] = 1$ si $f = \text{id}$ ou $f = -\text{id}$, et $\dim \mathbb{K}[f] = 2$ si f est une symétrie différente de id et $-\text{id}$.

13) a) Soit $g \in C(S)$.

Soit $v \in E \setminus \{0\}$. On considère un supplémentaire H de $\text{Vect}(v)$ dans E et on note f la symétrie d'axe $\text{Vect}(v)$ parallèlement à H .

Comme $g \circ f = f \circ g$, en particulier $g(f(v)) = f(g(v))$.

Mais $f(v) = v$ et donc $g(v) = f(g(v))$. Donc $g(v) \in \text{Fix}(f) = \mathbb{K}v$.

Ainsi pour tout $v \neq 0$ il existe un $\lambda_v \in \mathbb{K}$, tel que $g(v) = \lambda_v.v$.

On sait (c'est le miracle des homothéties, à redémontrer à chaque fois, mais bon une seule fois par devoir quand même), qu'on peut en déduire que ce λ_v est en fait indépendant de v , et que donc g est une homothétie.

Réciproquement, les homothéties commutent avec tous les endomorphismes. Donc on vient de montrer que $C(S) = \mathbb{K}\text{id}$, où $\mathbb{K}\text{id}$ est l'ensemble de toutes les homothéties.

b) Comme $S \subset GL(E)$, si $g \in C(GL(E))$ alors en particulier $g \in C(S)$ et donc par le résultat du a), $g = \lambda \text{id}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$

On sait que réciproquement les homothéties commutent avec tous les endomorphismes donc $C(GL(E)) = \mathbb{K}\text{id}$.