D.M. 13 : Développements asymptotiques de suites, solutions

I Séries : sommations des équivalents (théorème de 2ème année, ici exercice à la Cesaro)

Exercice 1 (Cas des sommes partielles de séries divergentes)**.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites avec (v_n) *à termes positifs* telle que la série $\sum v_n$ diverge. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ les sommes partielles d'ordre n respectives.

a) **Transmission de la négligeabilité** : on suppose ici que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Montrer que $S_n = o(S'_n)$.

b) **Transmission de l'équivalent** : on suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} S'_n$.

c) **Application concrète :** déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{sh}(\frac{1}{k})$

Solution 1 *Faite en classe*

N.B. La suite (u_n) n'est pas supposée à termes positifs. Cela sera très utile pour appliquer ce résultat au b).

Méthode : Directement avec la déf. de la négligeabilité et *méthode* Cesaro :

Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe un N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$, $|S_n| \leq \varepsilon S'_n$.

Or par hyp. $u_n = o(v_n)$, on a un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \varepsilon' v_n$ (1) avec $\varepsilon' = \varepsilon/2$.

Pour $n \geq n_0$, $|S_n| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| + \sum_{k=n_0}^{n} |u_k|$ (2).

• En sommant les inégalités (1) pour $k = n_0, \ldots, n$, on a :

$$\sum_{k=n_0}^{n} |u_k| \leq \varepsilon' \sum_{k=n_0}^{n} v_k \leq \varepsilon' \sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{\varepsilon}{2} S'_n \quad (3)$$

puisque tous les v_k sont positifs.

• D'autre part, comme $S'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et comme n_0 est fixé, on a $\dfrac{\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k|}{S'_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc on a un $n_1 \geq n_0$ tel que :

$$\forall\, n \geq n_1,\ \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} S'_n. \quad (4)$$

Avec (3) et (4) dans (2), on obtient :

$$\forall\, n \geq n_1,\ |S_n| \leq \varepsilon S'_n,$$

ce qu'on voulait démontrer.

b) **Remarque :** Comme (v_n) est à termes positifs, et que $u_n \sim v_n$, on sait que (u_n) est à termes positifs A.P.C.R. Ce théorème concerne donc les séries à termes positifs.

N.B. *On a besoin, pour pouvoir appliquer le résultat du a) que, dans le théorème de sommation des négligeables du a), le signe de u_n soit quelconque.*

En effet, on considère ici $u_n \sim v_n$, ce qui signifie que $u_n - v_n = o(v_n)$.

On pose $a_n = u_n - v_n$. La suite (a_n) est de signe quelconque, mais par le a), $a_n = o(v_n)$ entraîne, toujours avec l'hyp. que (v_n) est à termes positifs et que $\sum v_n$ diverge, que $A_n = o(V_n)$ où les majuscules désignent les sommes partielles.

Or $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} v_k = U_n - V_n$.

Donc $U_n - V_n = o(V_n)$ ce qui par définition équivaut à $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n$.

c) On sait que $\mathrm{sh}(\frac{1}{k}) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k}$. La suite $(\frac{1}{k})$ est à termes positifs et t.g. d'une série *divergente* (la série harmonique) donc le théorème de sommation des équivalents s'applique aux sommes partielles et donne que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 2 (Cas des restes de séries convergentes)**.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles avec (v_n) *à termes positifs* telles que la série $\sum v_n$ converge. On note $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ le reste d'ordre n de $\sum v_n$.

a) **Transmission de la négligeabilité** : on suppose ici que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Justifier d'abord que $\sum u_n$ converge. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer, mieux, qu'on a $R_n \underset{n\to+\infty}{=} o(R'_n)$.

b) **Transmission des équivalents** : on suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Montrer que : $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R'_n$.

c) **Premier exemple d'application :**

Justifier que $\sum \sin(\frac{1}{k^2})$ converge puis obtenir un équivalent simple des restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{k^2})$ quand $n \to +\infty$.

Solution 2 a) **Transmission de la négligeabilité** Pour justifier la convergence de $\sum u_n$, on montre que $\sum |u_n|$ converge. Or $|u_n| = o(v_n)$ avec v_n à termes positifs, telle que $\sum v_n$ converge, donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge, et donc $\sum u_n$ converge.

Passons au résultat annoncé pour R_n et R'_n : soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'on a un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \varepsilon v_n$.
Ainsi pour tous les entiers n, N tels que $n_0 \leq n \leq N$, et tout $k \in [\![n, N]\!]$, $|u_k| \leq \varepsilon v_k$, et en sommant ces inégalités : $\sum_{k=n}^{N} |u_k| \leq \varepsilon \sum_{k=n}^{N} v_k$.
Par inégalité triangulaire, $\left|\sum_{k=n}^{N} u_k\right| \leq \varepsilon \sum_{k=n}^{N} v_k$.
Comme on sait que les deux membres convergent pour n fixé, et $N \to +\infty$, on peut passer à la limite dans cette inégalité, pour obtenir :

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right| \leq \varepsilon \sum_{k=n}^{+\infty} v_k.$$

Autrement dit, on a montré que pour notre $\varepsilon > 0$ fixé, on a un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq n_0$, $|R_n| \leq \varepsilon R'_n$. On a vérifié la déf. de $R_n = o(R'_n)$.

b) **Transmission des équivalents** : on suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Montrons que : $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R'_n$.
Idem 1 b). On pose $a_n = u_n - v_n$. L'hyp. $u_n \sim v_n$ équivaut à $a_n = o(v_n)$.
On peut appliquer le théorème du a), à (a_n) et (v_n). On en déduit que $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{=} o(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k)$.
Autrement dit que $R_n - R'_n \underset{n\to+\infty}{=} o(R'_n)$ ce qui équivaut à $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R'_n$.

c) **Premier exemple d'application :** $\sin(\frac{1}{k^2}) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$, t.g. d'une série convergente, donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum \sin(\frac{1}{k^2})$ est convergente.

Le théorème de sommation des équivalents pour les restes s'applique donc et $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = R'_n$.

Pour avoir un équivalent plus simple de R'_n, on utilise la méthode de comparaisons avec les intégrales :
comme $t \mapsto 1/t^2$ est une fonction décroissante, on sait que pour tout $k \geq 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$$

En sommant ces inégalités pour $k = n+1$ à un $N \geq n+1$:

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n}^{N} \frac{dt}{t^2}.$$

En calculant les intégrales, on obtient l'encadrement :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{N}.$$

Par conservation des inégalités larges par passage à la limite, pour n fixé, $N \to +\infty$ (sachant déjà que ces limites existent) :

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Comme les deux encadrants sont équivalents à $\frac{1}{n}$, par théorème des gendarmes, on obtient que : $R'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Finalement on a obtenu que $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{k^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercice 3 (Application à une preuve « naturelle mais plus longue » de la formule de Stirling).

a) On a vu en cours que $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$ par encadrement par des intégrales. Reprendre l'argument.

b) On cherche maintenant un équivalent de $u_n = \ln(n!) - n\ln(n)$ de façon à avoir un D.A. à deux termes significatifs de $\ln(n!)$.
Pour cela, on va étudier la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$
   i) Dans quel exemple du cours a-t-on utilisé cette méthode ?
   ii) Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$.
   iii) Justifier que le théorème de sommation des équivalents de l'ex. 1 s'applique aux sommes partielles de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et en déduire un équivalent simple de u_n.

c) On étudie maintenant (pourquoi ?) $v_n = \ln(n!) - n\ln(n) + n$. En appliquant encore la même méthode qu'au b), obtenir un équivalent de v_n.

d) On étudie enfin (pourquoi ?) $w_n = \ln(n!) - n\ln(n) + n - \frac{1}{2}\ln(n)$. Montrer, avec la même méthode qu'au b), (encore !) que la suite (w_n) est convergente (sans déterminer sa limite qu'on notera k). Ecrire le D.A. à quatre termes significatifs obtenu pour $\ln(n!)$.
Conclure (enfin !) qu'il existe un K tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} K n^n e^{-n}\sqrt{n}$.

Solution 3 a) Cf. cours.

b) i) On a utilisé cette méthode par exemple pour passer de l'équivalent $H_n \sim \ln(n)$ au D.A. à deux termes significatifs : $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
   ii) Par déf. $u_{n+1} - u_n = \ln((n+1)!) - (n+1)\ln(n+1) - \ln(n!) + n\ln(n)$.
   Mais $\ln((n+1)!) - \ln(n!) = \ln(n+1)$ donc $u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - (n+1)\ln(n+1) + n\ln(n) = -n\ln(n+1) + n\ln(n) = -n\ln(\frac{n+1}{n}) = -n\ln(1+\frac{1}{n})$.
   Or $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, donc $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$. Cette limite est aussi bien sûr l'équivalent simple cherché !

iii) Ici $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -1$. La suite (v_n) constante égale à -1 est de signe constant, négatif !

Stricto-sensu le théorème de l'ex. 1 s'applique à une série *à termes positifs*. En considérant la série des opposées, on voit qu'on peut l'appliquer à une série dont les termes sont *de signe constant*.

Ainsi, ici, si on préfère, on applique donc le théorème de l'ex. 1 à $u_n - u_{n+1} \sim 1$. Il s'applique car $(v_n) = (1)$ est à termes positifs, et $\sum v_n$ est grossièrement divergente.

Le théorème de l'ex. 1. s'applique donc et dit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k - u_{k+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} 1$.

Autrement dit (somme télescopique), $u_0 - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1$.

Comme $n+1 \to +\infty$, et u_0 est fixé, on conclut que $u_{n+1} \sim -(n+1)$ ou encore $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n}$.

c) Pourquoi étudie-t-on cette suite (v_n) ? Parce qu'on vient de montrer que $\ln(n!) - n\ln(n) \sim -n$ et qu'on cherche maintenant un équivalent de la différence, pour avoir un terme de plus dans le D.A.

Comme au b), on étudie $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + (n+1) - n$ et avec le calcul du b) (ii), on sait donc que $v_{n+1} - v_n = -n\ln(1+\dfrac{1}{n}) + 1$.

Pour avoir un équivalent de $v_{n+1} - v_n$, on considère donc un D.L. de $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$.

On a alors $v_{n+1} - v_n = -n(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})) + 1 = \dfrac{1}{2n} + o(\dfrac{1}{n})$

Ainsi $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$, comme $(\dfrac{1}{2n})$ est une suite à termes positifs, t.g. d'une série divergente, on peut appliquer le théorème de sommation des équivalents aux sommes partielles qui donne que :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Autrement dit (sommes télescopiques) $v_{n+1} - v_1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\ln(n)$.

Comme $\ln(n) \to +\infty$ et v_1 est constant, on conclut que $v_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\ln(n)$.

Et comme $\ln(n) \sim \ln(n+1)$, on peut aussi écrire $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\ln(n)}$.

d) La réponse au *pourquoi* est donnée par l'équivalent qu'on a obtenu au c). On étudie une fois encore la différence de v_n avec son équivalent.

On considère encore $w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - v_n - \dfrac{1}{2}\ln(n+1) + \dfrac{1}{2}\ln(n) = 1 - n\ln(1+\dfrac{1}{n}) - \dfrac{1}{2}\ln(1+\dfrac{1}{n})$.

A l'aide du D.L. $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$, on en déduit : $w_{n+1} - w_n = 1 - n\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + o(\dfrac{1}{n^3})\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})\right)$.

Finalement $w_{n+1} - w_n = -\dfrac{1}{12n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$.

Remarque : on aurait eu un calcul plus léger en travaillant seulement à la précision $O(\dfrac{1}{n^2})$ notre grand ami pour les t.g. de séries.

Comme $(\dfrac{-1}{12n^2})$ est t.g. d'une série de Riemann convergente, on en déduit que $\sum w_{n+1} - w_n$ converge, donc que la suite (w_n) converge. On note $l \in \mathbb{R}$ sa limite : $w_n = l + \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Autrement dit, avec la déf. de (w_n), $\ln(n!) - n\ln(n) + n - \dfrac{1}{2}\ln(n) = l + o(1)$. Ou encore : $\ln(n!) = n\ln(n) - n + \dfrac{1}{2}\ln(n) + l + \varepsilon_n$.

Avoir compris : le résultat positif qui remplace « pas d'exp. d'équivalent ».
$\exp(o(1)) = \exp(\varepsilon_n)$ avec $\epsilon_n \to 0$ donc $\exp(\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $\boxed{\exp(o(1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1}$.
Par prop. de l'exp. d'une somme : $\boxed{\exp(u_n + o(1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(u_n))}$

En prenant l'exp. de cette *égalité*, $n! = \exp(n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + l).\exp(\varepsilon_n)$.

Or $\exp(n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + l) = n^n.e^{-n}\sqrt{n}K$ où $K = e^l$, et comme $\exp(\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on obtient bien l'équivalent :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} Kn^n.e^{-n}\sqrt{n}.$$

II Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec Cesaro appliqué à $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ pour α bien choisi

Exercice 4. a) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ est fixé et si u_n positive vérifie $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \to l \neq 0$, alors $u_n^\alpha/n \to l$ i.e. $u_n \sim (n\,l)^{\frac{1}{\alpha}}$.

N.B. – Le fait que u_n soit positive sert juste à définir u_n^α. Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, le même résultat est vrai pour u_n de signe quelconque.

b) Exemple 1 : soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

i) Etudier la limite de (u_n).

ii) En considérant $u_{n+1}^2 - u_n^2$, obtenir un équivalent simple de u_n pour $n \to +\infty$. (Comparer l'information obtenue ici avec celle obtenue si on avait regardé “seulement” $u_{n+1} - u_n$.)

c) Exemple 2 : soit (u_n) définie par $u_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

i) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

ii) En considérant la suite $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ trouver un équivalent simple de u_n.

Si vous trouvez les b) (ii) et c) (ii) parachutés, faites l'ex. 5.

Solution 4 a) On applique le lemme de l'escalier à $w_n = u_n^\alpha$.

b) (i) On étudie $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et impaire.

L'étude des variations donne :

On remarquant que les intervalles $[1, +\infty[$ et $]-\infty, -1]$ sont stables et que pour tout $u_0 > 0$, on a $u_1 \in [1, +\infty[$ et pour tout $u_0 < 0$, on a $u_1 \in]-\infty, -1]$.

• Cas $u_0 > 0$. Alors $u_1 \in I = [1, +\infty[$ stable par f donc $(u_n)_{n\geq 1} \in I^{\mathbb{N}^*}$.

En considérant $\varphi(x) = f(x) - x = \dfrac{1}{x} > 0$ sur I, on voit que $(u_n)_{n\geq1}$ est strictement croissante, donc admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ (1).

Par composition des limites, si (u_n) convergeait, elle convergerait vers un point fixe de f (car f continue), or f n'a pas de point fixe, donc, vu (1), $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

• Cas $u_0 < 0$. On obtient de même que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

(ii) On considère $u_{n+1}^2 - u_n^2 = (u_n + \dfrac{1}{u_n})^2 - u_n^2 = 2 + \dfrac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ puisqu'on a vu que $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ au (i).

En utilisant le a), on en déduit que $\dfrac{u_n^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$, donc que $u_n^2 \sim 2n$.

• Si $u_0 > 0$, on sait que $u_n > 0$ pour tout n et donc $u_n \sim \sqrt{2n}$.

• Si $u_0 < 0$, on sait que $u_n < 0$ pour tout n et donc $u_n \sim -\sqrt{2n}$.

c) (i) On considère $f : x \mapsto x - x^2$ qu'on étudie sur $[0, 1/2]$.

On a $f'(x) = 1 - 2x$, donc pour $x \in [0, 1/2]$, on a $-2x \in [-1, 0]$ donc $1 - 2x \in [0, 1]$ donc f ets croissante sur $[0, 1/2]$ et $f(0) = 0$ et $f(1/2) = 1/2 - 1/4 = 1/4$.

Donc $[0,1/2]$ intervalle stable par f, surlequel f est croissante, donc (u_n) est monotone, et $f(u_0) = u_0 - u_0^2 \leq u_0$ donc (u_n) est décroissante minorée par 0 donc converge.

Par continuité de f, et composition des limites, (u_n) ne peut converger que vers un point fixe de f i.e. ici vers 0 seul point fixe.

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) On considère $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u_n - u_n^2} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{u_n}{u_n - u_n^2} = \dfrac{1}{1-u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Donc par a), $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 5 (Points fixes de nature « indéterminée » explication du miracle de l'exercice précédent)**.** Soit V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $f : V \to \mathbb{R}^+$ continue admettant un développement limité de la forme : $f(x) = x - ax^\lambda + x^\lambda \varepsilon(x)$ avec $a > 0, \lambda > 1$ et $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

On considère la suite définie par $u_0 \in V$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que, quitte à restreindre V, on peut supposer que $\forall\, x \in V \setminus \{0\}$, $f(x) < x$.

b) En considérant V avec la prop. supplémentaire du a), soit une suite définie par $u_0 \in V$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que $u_n \to 0$.

c) Chercher $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite finie non nulle pour $n \to \infty$.

d) En déduire un équivalent de (u_n) quand $n \to \infty$.

e) Appliquer ce qui précède à (u_n) et (v_n) définies par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$ et $v_{n+1} = \ln(1+v_n)$.
Remarque – Cet exercice explique d'où vient l'exposant α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite finie non nulle. En pratique, au CCINP, on devrait vous donner le α, aux Mines et à Centrales, on doit trouver le α.

Solution 5 a) Dans un voisinage de 0^+, on a le D.L. $f(x) - x = -ax^\lambda + o(x^\lambda)$, en particulier, il existe un voisinage de 0^+ de la forme $]0,\alpha[$ sur lequel $f(x) - x$ est strictement négatif (signe de $-ax^\lambda$).

b) La propriété du a) dit que V est stable par f et en outre, $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc (u_n) est décroissante minorée par 0 donc converge dans $[0,\alpha]$. En outre l'inégalité du a) dit que tout les points différents de zéro ne sont pas point fixe de f, donc (u_n) converge vers zéro.

c) On cherche α tel que $f(x)^\alpha - x^\alpha$ ait une limite finie non nulle quand $x \to 0$.

Il est nécessaire que $\alpha \neq 0$ sinon les deux termes sont nuls.

Or $f(x)^\alpha = (x - ax^\lambda + o(x^\lambda))^\alpha = x^\alpha(1 - ax^{\lambda-1} + o(x^{\lambda-1}))^\alpha = x^\alpha(1 - a\alpha x^{\lambda-1} + o(x^{\lambda-1})) = x^\alpha - a\alpha x^{\alpha+\lambda-1} + o(x^{\alpha+\lambda-1})$

Donc $f(x)^\alpha - x^\alpha = -\alpha a x^{\alpha+\lambda-1} + o(x^{\alpha+\lambda-1})$ a une limite finie non non nulle si, et seulement si, $\alpha + \lambda - 1 = 0$.

Donc on doit choisir $\alpha = 1 - \lambda$.

d) Dans ce cas, $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\alpha a = a(\lambda - 1)$.

Et par le lemme de l'escalier $u_n^\alpha \sim a(\lambda-1)n$ d'où $u_n \sim (a(\lambda-1)n)^{1/\alpha} \sim (a(\lambda-1)n)^{1/(1-\lambda)}$.

e) (i) Pour $f = \sin$ on a $a = 1/6$ et $\lambda = 3$. Donc $u_n \sim (\frac{1}{3}n)^{-1/2} \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

(ii) Pour $f = \ln(1+\square)$, on a $a = 1/2$ et $\lambda = 2$, donc $v_n \sim (\frac{1}{2}n)^{-1} \sim \dfrac{2}{n}$.

Exercice 6 (Equivalent en un point fixe attractif, non super-attractif)**.** Soit V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(V,\mathbb{R})$ ayant un D.L. en 0 de la forme $f(x) = \alpha x + \beta x^r + o(x^r)$ avec $|\alpha| \in]0,1[$, $\beta \neq 0$ et $r > 1$ (on suppose ici r entier puisqu'il s'agit d'un D.L.).

a) Montrer qu'il existe un voisinage I de 0 inclus dans V, stable par f et tel que si on prend $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, on ait $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et pour tout $\alpha_1 > |\alpha|$, $u_n = O(\alpha_1^n)$.

b) Montrer, avec les notations du a), qu'on a, mieux, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \gamma\alpha^n$ où $\gamma \in \mathbb{R}^*$.

Indication – Pour montrer la convergence de (u_n/α^n) vers une limite finie non nulle, on gagnera à considérer celle de son logarithmique (ou plutôt de $\ln(|v_n|$ en justifiant d'abord que (v_n) est de signe constant A.P.C.R) , et on utilisera le lien suite/série.

Solution 6 a) L'argument est essentiellement le même qu'à l'ex. 5. a) et b). Comme $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$, on sait que $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} |\alpha\,| < 1$.

Donc si on fixe un $\alpha_1 \in]|\alpha|, 1[$ quelconque, par la définition de la limite, il existe un voisinage V de 0 tel que pour tout $x \in V$, $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leq \alpha_1$ donc $|f(x)| \leq \alpha_1 |x|$ (1) et donc $|f(x)| < |x|$ (2) si $x \neq 0$.

L'inégalité (2) assure déjà que V est stable par f et par l'inégalité (1) et récurrence immédiate, si $u_0 \in V$, $I u_n| \leq \alpha_1^n |u_0|$ ce qui montre bien que (u_n) converge vers 0 en $O(\alpha_1^n)$.

b) On note $v_n = u_n/\alpha^n$. Il s'agit de montrer que (v_n) converge vers une limite finie non nulle. Pour prendre le logarithme, remarquons d'abord que (v_n) est de signe constant A.P.C.R. : en effet, $v_{n+1}/v_n = \dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Or comme $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta u_n^r + o(u_n^r)$, on sait que $u_{n+1}/u_n = \alpha + \beta u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$. Donc $\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc v_{n+1}/v_n est positive A.P.C.R, et donc (v_n) est bien de signe constant A.P.C.R.

Ainsi pour montrer la CV de (v_n), il suffit de montrer celle de $(|v_n|)$ et pour la CV vers une limite finie non nulle, il est équivalent de considérer la convergence de $\ln(|v_n|)$.

Pour cette convergence, il est équivalent de montrer que la série de t.g $w_n = \ln|v_{n+1}| - \ln|v_n|$ converge.

Or, $w_n = \ln\left|\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right| = -\ln|\alpha| + \ln\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = -\ln|\alpha| + \ln|\alpha + \beta u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})|$.

Donc $w_n = \ln|1 + \beta_1 u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})|$ où $\beta_1 = \beta/\alpha$.

Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_1 u_n^{r-1}$.

Comme on a vu au a), que $u_n = O(\alpha_1^n)$ avec $0 < \alpha_1 < 1$, et α_1^n est T.G. d'une série géométrique convergente, on obtient que $|u_n|^{r-1} = O((\alpha_1^{r-1})^n)$ est encore dominée par un T.G. de série géométrique convergente, donc $\sum |u_n|^{r-1}$ converge, et par théorème de comparaisons pour les S.T.P., $\sum w_n$ est absolument convergente donc convergente, ce qui nous donne la conclusion recherchée pour (u_n). □

III Cas des suites définies implicitement : méthode de réintroduction successives

Exercice 7.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution $x_n \in]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

b) Donner un équivalent simple de x_n (pas dur !).

c) En posant $a_n = x_n - n\pi$, et en remarquant que $a_n = \arctan(x_n)$, obtenir, par réintroduction successive, un D.A. de x_n à la précision $o(\dfrac{1}{n^2})$.

Solution 7 a) Méthode standard : on considère $f(x) = \tan(x) - x$.

On étudie f sur chaque intervalle $I_n =]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

On a $f'(x) = \tan^2(x) \geq 0$ et f' ne s'annule qu'en $n\pi \in I_n$, donc f est strictement croissante sur I_n, comme f tend vers $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes, on en déduit par continuité et stricte monotonie, que f admet un unique zéro dans I_n, qui est le x_n cherché.

b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\pi - \frac{\pi}{2} \leq x_n \leq n\pi + \frac{\pi}{2}$ les deux membres extrêmes de l'encadrement étant équivalents à $n\pi$, par théorème des gendarmes, on a $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$.

c) L'idée de poser $a_n = x_n - n\pi$ est double : avoir un équivalent de a_n c'est déjà avoir un D.A. à deux termes de x_n. D'autre part, $\tan(a_n) = \tan(x_n)$ et $a_n \in]-\pi/2, \pi/2[$, donc en fait $a_n = \text{Arctan}(\tan(x_n)) = \text{Arctan}(x_n)$, puisque, par déf. de x_n, $\tan(x_n) = x_n$.

Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $a_n = \text{Arctan}(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi/2$.

Donc on a déjà $x_n = n\pi + \pi/2 + o(1)$, D.A. à deux termes.

Mais, mieux, pour savoir comment $a_n = \text{Arctan}(x_n)$ tend vers $\pi/2$ on peut l'écrire $x_n - n\pi = \text{Arctan}(x_n) = \pi/2 - \text{Arctan}(1/x_n)$.

Là recommence la méthode de réintroduction :

$\text{Arctan}(1/x_n) = \text{Arctan}(\dfrac{1}{n\pi + \pi/2 + o(1)}) = \text{Arctan}(\dfrac{1}{n\pi} \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}) = \text{Arctan}(\dfrac{1}{n\pi}(1 - \dfrac{1}{2n} + o(\dfrac{1}{n})) = \text{Arctan}(\dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{1}{2\pi n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})) = \dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{1}{2\pi n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$ en composant avec le DL d'Arctan.

On conclut qu'on a le D.A. $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \dfrac{1}{2n^2\pi} + o(\dfrac{1}{n^2})$, et on pourrait continuer !

Exercice 8 (Cas des suites définies implicitement : réintroduction successive)**.** Soit $c > 0$.

a) Montrer que l'équation $E_c : x\sin(x) - c\cos(x) = 0$ admet une unique racine $x_n \in]n\pi, n\pi + \pi/2[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Donner un équivalent simple de x_n (pas dur !)

c) En introduisant $u_n = x_n - n\pi$ dans (E_c), trouver un équivalent de (u_n) et donc un D.A. à deux termes significatifs de (x_n).

d) $(*)$ comment aller encore un cran plus loin ?

Solution 8 a) **Attention :** Certains disent encore des trucs merdiques du genre f est *strictement croissante et continue sur un intervalle* donc injective !

Marre des arguments parasites !!!
Sur l'exemple précédent, si on sait que f est strictement croissante, cela suffit pour dire que f est injective !!! Invoquer la continuité pour cela, c'est se tromper de guerre !

Reprenons donc pour la centième fois : comme cos ne s'annule pas sur $I_n = [n\pi, n\pi + \pi/2[$, sur I_n l'équation (E_c) est équivalente à $x\tan(x) = c$.

Notons $f : x \in I_n \mapsto x\tan(x)$.

Alors f est dérivable sur I_n et pour tout $x \in I_n$, $f'(x) = \tan(x) + x(1 + \tan^2(x))$.

Or pour $x \in]n\pi, n\pi + \pi/2[$, $\tan(x) > 0$, et $x > 0$ donc $f' > 0$ sur $\overset{\circ}{I_n}$ et comme I_n est un *intervalle*, f stmt croissante sur I_n (en particulier injective).

D'autre part, comme $f_n(n\pi) = 0$ et $f_n(x) \underset{x \to n\pi + \pi/2^-}{\longrightarrow} +\infty$, et que f_n est continue, et (on vient de le montrer) stmt croissante sur $[n\pi, n\pi + \pi/2[$, on sait (théorème de la bijection i.e. TVI+stricte monotonie) que f réalise une bijection de $[n\pi, n\pi + \pi/2[$ sur $[0, +\infty[$.

Ainsi pour tout $c \in]0, +\infty[$, c admet un unique antécédent par f.

b) Typique de ces exercices : $n\pi \le x_n \le n\pi + \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 1 \le \dfrac{x_n}{n\pi} \le 1 + \dfrac{1}{2n}$ donc par théorème d'encadrement $x_n \sim n\pi$.

(Pas de "théorème des gendarmes mobiles" sur une copie ce n'est pas officiel comme appellation !)

c) On remplace donc x_n par $u_n + n\pi$ dans l'équation $f(x_n) = 0$. En effet, cela fait apparaître l'équation en terme de u_n et c'est précisément de u_n qu'on veut un équivalent. Autrement dit :

$$\begin{aligned} f(x_n) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (u_n + n\pi)\sin(u_n + n\pi) - c\cos(u_n + n\pi) = 0 \Leftrightarrow (-1)^n[(u_n + n\pi)\sin(u_n) - c\cos(u_n)] = 0, \\ &\Leftrightarrow \quad (u_n + n\pi)\sin(u_n) = c\cos(u_n) \Leftrightarrow \tan(u_n) = \frac{c}{u_n + n\pi} \quad (*) \end{aligned}$$

L'essentiel – Au dénominateur dans $(*)$, $u_n + n\pi = x_n$ est équivalent simplement à $n\pi$ donc : *c'est pour cela que j'appelle cette méthode de poser $x_n = u_n + n\pi$ la méthode de réintroduction, à la fin, on arrive à une équation avec d'un côté u_n et de l'autre qq. ch. de connu en x_n*

$(*) \Rightarrow \tan(u_n) \sim \dfrac{c}{n\pi}$.

Mais ceci dit en particulier que $\tan(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (ce qu'on ne savait pas encore).

Mais alors, $\tan(u_n) \sim u_n$ et on obtient $u_n \sim \dfrac{c}{n\pi}$.

Conclusion : $x_n - n\pi \sim \dfrac{c}{n\pi}$ ce qu'on peut écrire sous la forme d'un D.A. à deux termes :

$$x_n = n\pi + \frac{c}{n\pi} + o(\frac{1}{n}).$$

d) Pour aller un cran plus loin : on pose $x_n = n\pi + \dfrac{c}{n\pi} + v_n$ et on cherche un équivalent de v_n.

On sait que $x_n - n\pi = \arctan(\tan(x_n)) = \arctan(\dfrac{c}{x_n})$ donc

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{c}{n\pi} + v_n & = & \arctan(\dfrac{c}{n\pi + \frac{c}{n\pi} + o(\frac{1}{n})}) \\ & = & \arctan(\dfrac{c}{n\pi} \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{c}{n^2\pi^2} + o(\dfrac{1}{n^2})}) \\ & = & \arctan(\dfrac{c}{n\pi} \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{c}{n^2\pi^2} + o(\dfrac{1}{n^2})}) \quad (*) \\ & = & \arctan(\dfrac{c}{n\pi}.(1 - \dfrac{c}{n^2\pi^2} + o(\dfrac{1}{n^2}))) \\ & = & \arctan(\dfrac{c}{n\pi} - \dfrac{c^2}{n^3\pi^3} + o(\dfrac{1}{n^3})) \\ & = & \dfrac{c}{n\pi} - \dfrac{c^2}{n^3\pi^3} - \dfrac{c^3}{3n^3\pi^3} + o(\dfrac{1}{n^3}), \end{array}$$

la dernière ligne par composition avec le DL_3 de Arctan.

Ainsi $v_n = \dfrac{-c^2(c+3)}{3n^3\pi^3} + o(\dfrac{1}{n^3})$.