Nature de séries

Exercice 1. Nature de la série de t.g. (u_n) pour :

a) $u_n = \dfrac{\sin(1/n))}{\sqrt{n+2}}$

b) $u_n = \cos(\dfrac{\pi n^2}{2n^2+an+1})$ où $a \geq 0$?

Exercice 2. Nature de $\sum u_n$ pour :

a) $u_n = \sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an}$.

b) $u_n = (\dfrac{\pi}{2})^\alpha - (\text{Arctan}(n))^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Nature de $\sum u_n$ pour : a) $\dfrac{n^\alpha \sin(n)}{2^n}$, b) $\dfrac{n\cos(n)}{\ln(n)^n}$, c) $u_n = e^{-\sqrt{\ln(n)}}$.

Lien avec les intégrales, et autour des séries de Riemann

Exercice 4 (Lien série/intégrale, un résultat explicitement dans le programme, améliorant le résultat donné en cours)**.** a) Montrer que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ est *décroissante* alors la série de terme général :

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \geq 0$$

est convergente.

b) En particulier, la série $\sum f(n)$ converge, si, et seulement si, f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

c) Retrouver directement avec le a) le D.A. de H_n à la précision $o(1)$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$. a) Déterminer un équivalent de (S_n).

b) Montrer que $S_n - 2\sqrt{n}$ converge.

Exercice 6 (Une nouvelle façon de calculer la somme de la S.H.A.)**.** a) Soit $A_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$. Exprimer A_{2n} en fonction de sommes partielles de la série harmonique (H_n).

b) On a déjà que vu $A_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge, déduire du a) une nouvelle façon de calculer sa limite.

Exercice 7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(n+k)^\alpha}$.

a) Etudier suivant la valeur de α la convergence de la suite (u_n). En cas de convergence, on précisera la limite de (u_n).

b) Nature de la série $\sum u_n$.

Exemples de calculs de sommes de séries

Exercice 8. Soit $u_n = \dfrac{2n-1}{n^3-4n}$. Calculer $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 9. Soit $p \geq 2$ fixé dans $\mathbb{N}$ et $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)}$. Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sans D.E.S. en calculant $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 10. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

Séries complexe ou réelles à signe variable

Exercice 11. Etudier la convergence de la série de t.g ; $u_n = \dfrac{(i-1)\sin(\frac{1}{n})}{(\sqrt{n+3}-1)\ln(n)}$ où i désigne le nombre complexe usuel dont le carré fait -1, où $n \geq 2$.

Exercice 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. a) Montrer que $\sum u_n$ est convergente.

b) Etudier la nature de $\sum |u_n|$.

c) On pose $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$. Justifier que $u_n \sim v_n$.

d) Etudier la nature de $\sum v_n$.