Injectivité/ surjectivité, Limites et continuité des fonctions d'une var. réelle : Revoir la pl. 6, Ex. 1 à 8 (exigibles !)

Exercice 1. Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, majorée.
Montrer que $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,+\infty[} f(x)$.

Exercice 2 (Un savoir faire crucial !)**.**
a) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ t.q. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Mq. f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
b) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que f atteint un minimum dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. a) Justifier que si $A \subset \mathbb{R}$ est dense, si f et g sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f_{|A} = g_{|A}$ alors $f = g$ (sur $\mathbb{R}$ entier).

Retenir : (*principe de prolongement par continuité à partir d'une partie dense :*)
Une fonction continue est parfaitement déterminée par sa restriction à une partie dense

Idée : Dans le b) et c) qui suivent ((*) pour celles et ceux qui ont aimé les morphismes décrits pl. 19) on applique ce principe de prolongement pour étudier des morphismes.. qu'on connaît bien sur $\mathbb{Q}$ grâce à l'algèbre (cf. pl. 19)... et qu'on va pouvoir connaître sur $\mathbb{R}$.
b) Soit $f : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R},+)$ un morphisme *continu* de groupes.
(i) Que dire de $f_{|\mathbb{Q}}$? (ii) En déduire la forme de f sur $\mathbb{R}$ entier.
(iii) Retrouver ce résultat en commençant à montrer que f est automatiquement dérivable.

c) Soit $f : (\mathbb{R},+,\times) \to (\mathbb{R},+,\times)$ un morphisme de corps. Que dire de $f_{|\mathbb{Q}}$? Montrer que f est croissant. En déduire que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Points fixes de fonctions continues

Exercice 4 (Classique incontournable)**.** Soit $I = [a,b]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue.
a) On suppose que $f(I) \subset I$. Montrer que f admet un point fixe dans I.
b) On suppose que $I \subset f(I)$. Montrer que f admet également un point fixe dans I.
Méthode connue au a), faites deux dessins pour comparer a) et b).

Exercice 5 (Variante qui demande en plus de bien utiliser la déf. de la limite)**.** Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ telle que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$. Montrer que f admet un point fixe $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

Marcheur et autres cordes

Exercice 6 (Version la plus basique)**.** a) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1/2]$ tel que $f(x+\frac{1}{2}) = f(x)$.
b)Un marcheur parcourt une distance D=6 km en une heure. Montrer qu'il y a dans cette heure un intervalle d'une demi-heure dans lequel il parcourt exactement 3 km.
c) Avec les hyp. du a), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in [0,1-\frac{1}{n}]$ tel que $f(x_n+\frac{1}{n}) = f(x_n)$.

Exercice 7 (Un cas où on a toutes les cordes !)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, périodique de période 1. Montrer :

$$\forall\, a \in]0,+\infty[,\ \exists\, c \in \mathbb{R},\ f(c+a) = f(c).$$

Comment on obtient un résultat de stricte monotonie pour une fonction continue

Exercice 8. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ et $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 9 (Racine carré d'une application affine pour la composition, difficile)**.** a) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\exists\,(a,b) \in \mathbb{R}*\times\mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f\circ f(x) = ax+b$.
(i) Montrer que f est monotone et que $a > 0$.
(ii) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(ax+b) = af(x)+b$.
b) On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $a \neq 1$.Déterminer explicitement f.
Indication : pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on pourra considérer la suite définie par $x_0 = x$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \varphi(x_n)$ où $\varphi(x_n) = ax_n + b$ si $|a| < 1$.