Autour du théorème de la moyenne de Cesaro

L'énoncé suivant n'est pas, sous cette forme, dans le programme, mais il est vraiment à connaître, aussi bien pour son résultat *que pour la méthode de sa* démonstration. *En fait c'est une conséquence facile du théorème de sommation des équivalents pour les S.T.P. qui est, lui, dans le programme de deuxième année, avec la même démonstration...*

Thme (de la moyenne de Cesaro) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $M_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$ qui est donc la moyenne arithmétique de n premiers termes de (u_n).
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ alors $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq n_0$, $|u_k - l| < \varepsilon' = \varepsilon/2 \quad (*)$. On fixe donc cet entier n_0 et dans ce qui suit, on considère $n \geq n_0$.

On réduit au même dénominateur : $|M_n - l| = |\dfrac{(u_1 - l) + \cdots + (u_n - l)}{n}| \leq \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} |u_k - l|}{n}$.
Idée (ce qui suit ne serait pas sur une copie :) On veut majorer $|M_n - l|$ par ε APCR.

La méthode de Cesaro est de couper la somme précédente en deux :
• D'un côté les termes $|u_k - l|$ pour $k \geq n_0$ qui sont petits : même si leur nombre tend vers l'infini avec n, leur moyenne (divisée par n sera petite)
• De l'autre les termes $|u_k - l|$ pour $k \leq n_0$: on ne connaît pas leur taille, mais il y en a un nombre fixé indépendant de n, à savoir n_0, donc en divisant par n, leur contribution va tendre vers zéro.

Retour à la rédaction :

On a : $|M_n - l| \leq A_n + B_n \quad (0)$ où $A_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n_0} |u_k - l|}{n}$ et $B_n = \dfrac{\sum\limits_{k=n_0+1}^{n} |u_k - l|}{n}$.

• D'une part, par $(*)$ appliqué à tous les $k \in [[n_0 + 1, n]]$, on a $B_n \leq \dfrac{\sum\limits_{k=n_0+1}^{n} \varepsilon'}{n} = \dfrac{(n - n_0)\varepsilon'}{n} \leq \varepsilon' = \varepsilon/2$.
Donc $\forall\, n \geq n_0,\ B_n \leq \varepsilon/2 \quad (1)$.
• D'autre part, comme n_0 est fixé, le numérateur de A_n est une constante C indépendante de n. Donc $A_n = C/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc il existe un $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $A_n \leq \varepsilon/2 \quad (2)$.
Conclusion : Par $(0), (1), (2)$, pour tout $n \geq n_1$, on a $|M_n - l| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.
Donc on a vérifié la déf. de la limite : $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. □

Exercice 1 (Travail à faire)**.** a) Montrer que le théorème de Cesaro s'applique si $l \in \overline{\mathbb{R}}$. (Reprendre la démonstration si $l = \pm\infty$).
b) Montrer que la réciproque du théorème de Cesaro est fausse : on peut avoir convergence « en moyenne » sans avoir convergence.

Variantes de Cesaro

Exercice 2. Soit $(w_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$. a) Cesaro à peine caché : montrer que si $(w_{n+1} - w_n) \to l$ alors $\frac{w_n}{n} \to l$.
b) En déduire que si $u_{n+1}/u_n \to l$ et si (u_n) est à termes positifs, alors $\sqrt[n]{u_n} \to l$.
c) *Une jolie application, comme un premier pas vers Stirling :* en appliquant le b) à $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, obtenir un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$.
d) Retrouver directement le résultat du b) sans utiliser le théorème de Cesaro, en faisant une preuve avec de ε (même départ que d'Alembert, puis on prend la racine n-ième).

Exercice 3. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \to l$ et $v_n \to l'$ avec $(l, l') \in \mathbb{R}^2$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0}{n + 1}$.
Etudier la limite de (S_n).