Chap. E3 : les séries réelles et complexes

Achille en pleine course ne pourra jamais rattraper une tortue marchant devant lui, car il devra avant tout atteindre le point de départ de cette dernière. Or quand il aura atteint ce point, la tortue aura avancé ; il lui faudra alors atteindre sa nouvelle position, et lorsqu'il l'aura atteinte, la tortue aura de nouveau avancé, etc. La tortue sera donc toujours en tête.

Paradoxe de Zénon d'Elée, cité dans Aristote, Physique, VI.

I Des suites fabriquées à partir d'autres suites :

1) Le langage des séries :

a) La suite des sommes partielles

(i) Définitions : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. Avec cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on fabrique une nouvelle suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Etudier la série de **terme général $\boldsymbol{u_n}$**, notée $\sum u_n$ (sans bornes), c'est étudier la suite (S_n), appelée suite des sommes partielles de la série.
Pour n fixé, le nombre $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ s'appelle **somme partielle d'ordre n de la série**.

(ii) Exemples déjà rencontrés :

- La série harmonique, qui est la série fabriquée à partir de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, autrement dit, la série notée $\sum \frac{1}{n}$, dont les *sommes partielles d'ordre* n sont les $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, notées plus souvent H_n.

Attention aux noms de variables muettes : on dit par ex. « la série de terme général $\frac{1}{n}$ », mais si on veut écrire la somme partielle S_n, on devra la noter : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, (et pas $\frac{1}{n}$).

- La série de terme général $\frac{1}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$, dont les sommes partielles sont les $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

(iii) Remarque : la notation $\sum u_n$ sans borne pour désigner la série ne désigne pas un nombre, mais une suite.

Ainsi les séries du (ii) sont notées $\sum \frac{1}{k}$ et $\sum \frac{1}{k!}$ (sans bornes, *malgré l'ambiguité liée au fait de savoir pour quelle valeur de k on commence la somme*).

b) La convergence/divergence des séries :

(i) Définition (évidente) : Avec les notations ci-dessus, on dit que la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la suite (S_n) converge. Sinon, on dit qu'elle diverge.

(ii) Définition : Si la série $\sum u_n$ converge, autrement dit si la suite (S_n) converge, la **limite** de (S_n) est appelée **somme** de la série $\sum u_n$ et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Attention : on ne s'autorisera à écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ que si on sait déjà que $\sum u_n$ converge
(Exactement comme pour la notation $\lim_{n\to+\infty}$, puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$.)

(iii) Exemples : • On a démontré au E2, que la série harmonique $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge (on le redémontrera autrement un peu plus loin).

• On a démontré au F3 que $\sum \frac{1}{k!}$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} =$

• On a dém. au F3 que la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} =$

c) Les restes d'une série convergente :

(i) Définition : Soit une série $\sum u_n$ convergente, et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ sa somme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle **reste d'ordre** n de la série le nombre :

$$R_n = S - S_n.$$

Bien sûr : $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$

(ii) Propriété : Avec les notations et hypothèses du (i), si on fixe un $n \in \mathbb{N}$, et qu'on pose pour tout $N \geq n$, $S_{n,N} = \sum_{k=n+1}^{N} u_k = S_N - S_n$, on sait que (pour n fixé), $S_{n,N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} S - S_n$. Ceci légitime l'écriture :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k.$$

(iii) Exemple : pour $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$, on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Avec la formule de T.R.I., on a aussi une écriture intégrale de ce R_n (le reste de Taylor R.I.).

2) Une condition nécessaire cruciale pour la convergence des séries :

(i) **Prop. :** Si une *série* $\sum u_n$ converge alors la *suite* (u_n) tend vers zéro.

Preuve : L'essentiel : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$. □

(ii) **La réciproque est fausse :** *Contre exemple ?*

(iii) **Scholie :** L'étude de la CV de $\sum u_n$ demande donc plus de travail que de montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La convergence de $\sum u_n$ va dépendre (au moins pour les séries à termes positifs) de la *vitesse* avec laquelle $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Penser à la différence de comportement de la série $\sum u_n$ *pour* $u_n = \frac{1}{n}$ *et* $u_n = \frac{1}{n!}$.

On va voir que l'étude de la CV/DIV des séries à termes positifs $\sum u_n$ est essentiellement l'estimation d'une vitesse de convergence vers 0 du terme général u_n.

(iv) **Retenir aussi la *contraposée du (i)* :**

Si la suite (u_n) ne tend pas vers zéro, on dit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement !

3) Premières séries de références, les séries géométriques :

a) On sait que si $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\sum_{k=0}^{n} q^k =$

b) On conclut que, pour tout $q \in \mathbb{C}$:

• si $|q| < 1$, la série $\sum q^k$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k =$

• si $|q| \geq 1$, la suite (q^n) ne tend pas vers zéro, donc la série $\sum q^n$

4) Remarque pour les séries à t.g. complexes : décomposition partie réelle/ imaginaire

Si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n + ib_n$ avec a_n, b_n réels, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, et dans ce cas, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$

II Etude des séries à termes positifs :

N.B. 1 *Tout ce qu'on va dire, par commodité, pour les séries à termes positifs s'adapte immédiatement aux séries à termes négatifs, et donc il serait plus juste d'intituler ce paragraphe : étude des séries à termes de signe constant. Néanmoins pour éviter d'alourdir les énoncés en distinguant les cas, on ne traite que le cas où* $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

N.B. 2 *toutes les prop. traitant de limite concernent la suite A.P.C.R. Donc on pourra aussi supposer seulement* (u_n) *positive A.P.C.R.*

1) L'essentiel : conséquence du théorème de la limite monotone :

Prop. Une série $\sum u_n$ ***à termes positifs*** converge ssi la suite (S_n) des sommes partielle est **majorée** par une constante.
Sinon, $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2) Application : théorèmes de comparaisons de séries à termes positifs :

a) Première version :
(H) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
(C1) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.
(C2) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Preuve : cf. notes. □

b) Seconde version :

Il s'agit juste d'avoir une version un peu plus maniable de l'énoncé précédent : En général, la majoration $u_n \leq v_n$ peut n'être vraie qu'A.P.C.R et à une constante multiplicative près ce qui donne :

(H) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.
(C1) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge
(C2) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

N.B. : Bien sûr, on a perdu la comparaison entre les sommes, qui, elles, dépendent des premiers termes.

c) Corollaire : théorème de l'équivalent pour les séries à termes positifs

Prop. Soient (u_n) et (v_n) deux suites *positives A.P.C.R* telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

d) Exercice d'application : Etudier la nature de la série $\sum \sin(\frac{1}{k})$.

3) Méthode de comparaison aux séries géométriques : le test de d'Alembert

a) Rappel : conclusion « forte » du test de d'Alembert vu au E2.
b) Applications aux séries : test de d'Alembert pour les séries.
c) Exemple d'application : déterminer pour quelles valeurs de r la série $\sum \frac{n^n.r^n}{n!}$ converge.

4) Méthode de comparaison série/intégrale pour les séries $\sum f(n)$ avec f monotone

a) L'encadrement essentiel formulé pour f décroissante :

Si $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, décroissante, alors :

$$\forall\, n \geq 1, \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t)dt.$$

Savoir dessiner *la preuve, ce qui permet aussi de* retenir *l'encadrement.*
Savoir aussi rédiger *la preuve !*
Savoir établir l'encadrement analogue pour les fonctions croissantes...

b) Conséquence : théorème de comparaison série/intégrale dans le cas décroissant

Prop. (H) $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ est continue par morceaux et décroissante.
(C) La série $\sum f(n)$ converge si, et seulement si, la suite $(\int_a^n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5) Les deuxièmes séries de références : les séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$

On a déjà vue les séries géométriques comme séries de réf..

Ne pas confondre *séries de Riemann* et *sommes de Riemann* (qui ne sont pas des séries)

a) Terminologie : On appelle série de Riemann d'exposant α la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour $\alpha = 1$, on retrouve la série harmonique, $\sum \dfrac{1}{n}$ dont on sait qu'elle diverge.

b) Théorème : La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Preuve par comparaison avec une intégrale.

Culturel : Ainsi on a montré que $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente. On peut montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

6) Méthode de la comparaison avec une série de Riemann :

a) Méthode : Très souvent pour étudier la nature d'une série $\sum u_n$ avec $u_n \geq 0$, on compare le t.g. u_n avec celui d'une série de Riemann, en gros d'une des trois manières suivantes :

- s'il existe un $\alpha > 1$ (très souvent $\alpha = 2$) tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\sum u_n$ converge,
- s'il existe un $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge,
- si on a directement un équivalent $u_n \sim \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$, alors par théorème sur les équivalents pour les séries à termes positifs, on conclut que $\sum u_n$ CV ssi $\alpha > 1$.

b) Exercices d'application :

(i) Etudier, la nature de la série $\sum v_n$ pour $v_n = e^{-\sqrt{n}}$.

(ii) Etudier la nature de la série $\sum u_n$ pour $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$.

7) Utilisation de l'encadrement par les intégrales pour avoir un équivalent :

a) Exemple de la série harmonique : A l'aide d'un encadrement par des intégrales, obtenir un équivalent de H_n.

b) Un exemple avec un série grossièrement divergente : $\sum f(n)$ avec f croissante

(i) Obtenir un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \ln k$.

(ii) **Remarque :** L'équivalent obtenu donne un équivalent de $\ln(n!)$. : $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

c) Cas des séries convergentes : équivalent du reste. On sait que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ converge.

Déterminer un équivalent simple de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

III Convergence absolue pour les séries réelles à signes quelconques ou complexes

1) Définition :

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. On dit que la série $\sum u_n$ *converge absolument* (ou « est absolument convergente ») ssi $\sum |u_n|$ est convergente.

2) Propriété : Toute série absolument convergente est convergente.

La réciproque est fausse : on a déjà vu un exemple d'une série $\sum u_n$ qui converge et telle que $\sum |u_n|$ diverge :

3) Preuve de la prop. du 2) pour les $u_n \in \mathbb{R}$:
On introduit la déf.-notation suivante : $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$.
On remarque que par déf. u_n^+ et u_n^- sont toujours positifs et qu'on a les relations :

$$\begin{aligned} u_n^+ - u_n^- &= \\ u_n^+ + u_n^- &= \end{aligned}$$

On déduit de la convergence de $\sum |u_n|$ que $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent car
On en déduit que $\sum u_n$ converge par

4) Preuve de la prop. du 2) pour les $u_n \in \mathbb{C}$: mq $\sum |\mathrm{Re}(u_n)|$ et $\sum |\mathrm{Im}(u_n)|$ CV.

5) Comment utiliser la convergence absolue en pratique ?

Pour une série $\sum u_n$ de signe quelconque (ou complexe), on peut utiliser, pour étudier $\sum |u_n|$, tous les théorèmes et les techniques vues pour les séries à termes positifs.
Notamment la comparaison avec les séries géométriques ou avec les séries de Riemann.

Exercices d'application :
a) Nature de $\sum \dfrac{\sin(n)}{n^2}$ b) Nature de $\sum \dfrac{e^{i\sqrt{n}}}{n^3}$.
c) Nature de $\sum \dbinom{\alpha}{n} z^n$ pour α fixé, suivant la valeur de $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$.

6) Attention aux équivalents pour les t.g. des séries à signe non constant
a) Mauvaise nouvelle :

Le théorème sur les équivalents des t.g. ne s'applique pas !

Autrement dit, on peut avoir $u_n \sim v_n$ et $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de nature différente : cf. pl.

b) Bonne nouvelle :

En revanche si $|u_n|$ est équivalent au t.g. d'une série convergente, pas de pb. : CVA

IV Lien suite/série : applications à des D.A. (de suites, de séries)

1) Principe des sommes télescopiques, appelé lien suite-série dans le programme :

Prop. Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite (u_n) et la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.

2) Application au D.A. de la série harmonique :

On note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On a vu que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Il est donc naturel d'étudier $u_n = H_n - \ln(n)$: un équivalent de u_n donnera un D.A. à deux termes de H_n.

Pour étudier la suite (u_n), on va plutôt considérer la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$

Etude de cette série : *cf. notes manuscrites.*

Moralité : Cette méthode est intéressante car :
• u_n fait apparaître un $\sum$ (sans être une série) donc $v_n = u_{n+1} - u_n$ est plus simple,
• on peut investir pour $\sum v_n$ les techniques vues pour les séries : convergence absolue, comparaisons aux séries de Riemann.

Retenir le résultat : $H_n - \ln(n)$ converge, on note γ sa limite, appelée *constante d'Euler* : une valeur numérique approchée en est $0,577$.

Ce qui donne le D.A. :

$$\boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)}$$

Remarque : Comment on peut comprendre *purement graphiquement* que $H_n - \ln(n+1)$ converge (ce qui montre aussi que $H_n - \ln(n)$ converge, vers la même limite car $\ln(n+1) - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$) et obtenir aussi sur le graphique que la limite γ vérifie $1/2 \leq \gamma \leq 1$.

3) Application à la formule de Stirling :

a) On a vu au II 6) b) que $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$ par la méthode

b) On ne peut pas en déduire un équivalent de $n!$ car

(i) *Méthode « naturelle » qui permet de* trouver *le résultat :* l'idée de départ est de *préciser* de le résultat du a), en posant (idem 2) $u_n = \ln(n!) - n\ln(n)$, et en cherchant un équivalent de u_n, cf. D.M. et d'aller ainsi jusqu'à un D.A. de $\ln(n!)$ à la précision $o(1)$. Quand on arrive à la précision $o(1)$, on pourra prendre l'exponentielle.

(ii) *Méthode « parachutée » ici pour aller plus vite quand on sait le résultat* :

Le but de ce qui suit est de montrer qu'il existe un constante K telle que :

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} Kn^n e^{-n}\sqrt{n}}$$

Pour cela, on introduit la suite $(u_n) = (\dfrac{n^n\sqrt{n}e^{-n}}{n!})$, dont on veut montrer qu'elle converge. Arrive le lien suite/série :

Il est équivalent d'étudier la limite de la suite de $\ln(u_n)$ ou encore de la série $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$.

On pose donc $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. A l'aide de D.L., on obtient un équivalent de v_n et on conclut.

c) Comment obtenir la constante K ?

d) Formule finale à connaître :

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$$

V Méthodes de calcul de sommes de séries :

1) Cas de $\sum f(n)$ avec f fraction rationnelle : on commence par faire la

a) Cas sympas où la D.E.S. donne directement une somme télescopique.

Exemple : calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

b) Cas plus général : exemple d'utilisation du D.A. $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$

Soit $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)}$. Justifier que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

c) Si on a des facteurs multiples au dénominateurs... c'est plus compliqué !

Par exemple $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ $(*)$, mais on a démontré assez récemment seulement que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ est irrationnel. Exercice possible : calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ avec $(*)$.

2) Autres exemples (pas forcément rationnels) cf. pl. : encore des sommes télescopiques...