

DEVOIR SURVEILLÉ 6 (3H45)

Exercice 1 (Equation différentielle singulière).On cherche les fonctions $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$(E) : \forall x \in \mathbb{R}, (\operatorname{ch}(x) - 1)y'(x) + \operatorname{sh}(x)y(x) = x \operatorname{sh}(x).$$

- a) Résoudre (E) sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.
- b) Déterminer, s'il en existe, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ entier.

Exercice 2 (Suite récurrente associée au cosinus ... à l'endroit et à l'envers).

a) « A l'endroit » :

- i) Démontrer qu'il existe un unique réel $a \in \mathbb{R}$, tel que $a = \cos(a)$.
- ii) On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \cos(v_n)$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - a| \leq (\sin(1))^n$ ce qui montre en particulier que
$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a.$$
- iii) Montrer que les suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont adjacentes.
- iv) Une limitation de la vitesse de convergence de (v_n) :

On calcule $v_1 \simeq 0,54$, $v_2 \simeq 0,86$, $v_3 \simeq 0,64$ et $\sin(v_1) \simeq 0,51$ de sorte que $v_3 - v_1 \geq \frac{1}{10}$ et

$$\sin(v_1) \geq \frac{1}{2}.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, $|v_n - a| \geq \frac{1}{10 \times 2^{n-1}}.$

b) « A l'envers » (cf. (iii) ci-dessous) :

- i) Soit $f = \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On note $f^{\circ n}$ la composée $f \circ f \circ \dots \circ f$ avec n fois f .
Donner une forme explicite pour les intervalles $f^{\circ(2n)}(\mathbb{R})$ et $f^{\circ(2n+1)}(\mathbb{R})$ à l'aide des termes de la suite (v_n) du a).
- ii) Déterminer alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{\circ n}(\mathbb{R})$.
- iii) Dédurre de ce qui précède, pour quelle valeur de u_0 dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos(u_{n+1})$?

PROBLÈME : DILATATIONS (ET L'ENVERS) : RÉSULTATS GLOBAUX ET LOCAUX

PARTIE I : ÉTUDE GLOBALE DES DILATATIONS DANS $\mathbb{R}$ **Définition :** une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sera appelée *dilatation* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \geq |x - y|. \quad (\dagger)$$

1) Premiers exemples, premières propriétés :

- a) Déterminer une C.N.S. sur les coefficients $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ pour que f soit une dilatation.
- b) Montrer que si f est une dilatation et f est *continue* sur $\mathbb{R}$ alors f est *strictement monotone*.
- c) Justifier que la fonction affine par morceaux suivante est bien une dilatation, non monotone :

$$f : x \mapsto \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x \leq 0, \\ x & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ -x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$
- d) Dans cette question, on suppose que f est croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est une dilatation si, et seulement si, la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ est croissante.

- e) Dans cette question, on suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner une C.N.S. sur f' pour que f soit une dilatation.
- f) En déduire que la fonction sh est une dilatation de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2) Bijectivité de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour les dilatations continues :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une dilatation continue, on a montré au 1) b) que f est strictement monotone.

- a) Montrer que si f est strictement croissante, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
- b) Toujours dans le cas où f est strictement croissante, montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- c) Que dire dans le cas où f est strictement décroissante ?

3) Cas où f , monotone, laisse stable un segment.

On suppose dans ce paragraphe que f est une dilatation de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $I = [a, b]$ est un segment stable par f .

- a) On suppose que f est croissante :
 - i) montrer que $f(a) = a$ et $f(b) = b$.
 - ii) montrer que $f|_{[a,b]}$ est en fait $\text{id}_{[a,b]}$
- b) On suppose que f est décroissante : déduire de ce qui précède la forme de $f|_{[a,b]}$.
Indication – On pourra fabriquer à partir de f une autre fonction, qui est encore une dilatation, et qui est croissante...

4) Etude de f en $+\infty$

Dans cette question 4), on suppose que f est une dilatation *croissante*.

- a) On suppose ici $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x$. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$, puis que le graphe de f admet une droite asymptote, parallèle à $\Delta : y = x$ en $+\infty$.
- b) On suppose maintenant que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) > x$. Montrer cette fois que le graphe de f admet une droite asymptote, parallèle à $\Delta : y = x$ en $-\infty$.
- c) Si f admet un point fixe, aucune des deux hypothèses ci-dessus n'est vérifiée. Montrer qu'alors l'ensemble $F = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = x\}$ des points fixes de f est un *intervalle*.

5) Le point de vue des suites :

Soit f continue, dilatante, strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On suppose que l'ensemble F des points fixes de f est non vide et on le note $F = [\alpha, \beta]$. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$. Montrer que la suite (u_n) converge, et si, elle n'est pas stationnaire, sa limite est une des deux bornes α, β de F .

PARTIE II : ÉTUDE LOCALE, RÉPULSION ET ATTRACTION

6) Points fixes attractifs et répulsifs

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ une fonction quelconque admettant un point fixe $a \in I$.

- a) On suppose que $|f'(a)| < 1$ (on dit alors que f est un point fixe *attractif* de f). Montrer qu'il existe un intervalle fermé J de centre a , stable par f tel que si on prend $x_0 \in J$ quelconque alors la suite (x_n) définie par ce x_0 et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$, converge vers a .
- b) Sous les conditions de la question précédente, on suppose de plus que f' ne s'annule pas sur J . Montrer que si $x_0 \neq a$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \neq a$ et :

$$x_{n+1} - a \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} f'(a)(x_n - a).$$

- c) On suppose maintenant qu'au contraire $|f'(a)| > 1$. Montrer qu'il existe un intervalle fermé J de centre a tel que pour tout $x_0 \in J \setminus \{a\}$, la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ sorte de J pour une certaine valeur n_0 . Dans ce cas on dit que a est un point fixe *répulsif* de f .
- d) Montrer que si $f : I \rightarrow I$ est *bijective* et $a \in I$ est un point fixe répulsif de f , alors a est un point fixe attractif de f^{-1} .

Les points fixes répulsifs ne se laissent donc pas facilement approcher en calcul numérique, sauf si f est bijective et si f^{-1} est facile à manipuler. Mais il existe une méthode rusée qui permet de le faire, que nous allons brièvement présenter dans le paragraphe qui suit.

7) Méthode d'accélération de convergence et de transformation répulsion/attraction

- a) Soit (x_n) une suite réelle qui converge vers un $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel k avec $|k| < 1$ et une suite (ε_n) tendant vers 0 tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq \ell \quad \text{et} \quad x_{n+1} - \ell = (k + \varepsilon_n)(x_n - \ell)$$

(On pourra noter la similitude de cette hypothèse avec le résultat du 6) b)).

La **méthode A** (méthode d'accélération) consiste à considérer la suite (y_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

- i) Justifier que $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et donc (y_n) est bien définie à partir d'un certain rang.
- ii) Montrer que la suite (y_n) converge vers ℓ strictement plus vite que (x_n) c'est-à-dire que :

$$(y_n - \ell) = o(x_n - \ell) \quad \text{pour } n \rightarrow +\infty$$

- b) La **méthode S** : Soit (x_n) une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$ avec f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle stable I et possédant un point fixe $\ell \in I$.

La méthode A appliquée à cette suite ferait intervenir la suite (y_n) définie à partir d'un certain rang par :

$$y_n = x_n - \frac{(f(x_n) - x_n)^2}{(f \circ f)(x_n) - 2f(x_n) + x_n}$$

La méthode S consiste à considérer la suite (s_n) définie par :

$$s_{n+1} = s_n - \frac{(f(s_n) - s_n)^2}{(f \circ f)(s_n) - 2f(s_n) + s_n}$$

On remarque que la dernière formule s'écrit aussi :

$$s_{n+1} = g(s_n) \quad \text{avec} \quad g(x) = \frac{x \cdot f^{\circ 2}(x) - f(x)^2}{f^{\circ 2}(x) - 2f(x) + x}$$

- i) Justifier que si ℓ est un point fixe de g alors ℓ est aussi un point fixe de f .
- ii) Montrer réciproquement que si ℓ est un point fixe de f tel que $f'(\ell) \neq 1$ alors g se prolonge par continuité en ℓ et $g(\ell) = \ell$.

N.B. Cette question est un joli calcul de limite avec des D.L.₁ abstraits.

- iii) On suppose que ℓ est un point fixe de f et que ℓ est *répulsif*, autrement dit que $|f'(\ell)| > 1$. Pour simplifier les calculs, on prend $\ell = 0$, ce qui ne restreint en fait pas la généralité. On suppose en outre que f est de classe $\mathcal{D}^2$ sur un voisinage de $\ell = 0$. Montrer que ℓ est un point fixe *attractif* de g .
(Et donc en itérant g on peut calculer des valeurs numériques approchées du point fixe ℓ de f).