

DEVOIR SURVEILLÉ 6 : SOLUTIONS

Exercice 1. a) • sur chacun des intervalles I_i pour $i = 1, 2$, on normalise l'équation :

$$y'(x) + \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x) - 1} y(x) = \frac{x \text{sh}(x)}{\text{ch}(x) - 1}.$$

• Pour l'E.D. homogène $E_H : y'(x) + \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x) - 1} y(x) = 0$. On pose $a(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x) - 1}$ qui est de la forme $u'(x)/u(x)$ avec $u(x) = \text{ch}(x) - 1 > 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi une primitive A de a est donnée par $A(x) = 2 \ln |\text{ch}(x) - 1|$ sur chaque I_i .

Par théorème, la forme générale des solutions de (E_H) sur I_i est : $y_H(x) = \lambda_i e^{-A(x)}$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ est une constante

Autrement dit $y_H(x) = \frac{\lambda_i}{\text{ch}(x) - 1}.$

• On résout l'E.D. avec second membre avec la M.V.C. : on cherche $y(x) = \frac{\lambda(x)}{\text{ch}(x) - 1}$ solution de (E) .

Ceci équivaut à : $\frac{\lambda'(x)}{\text{ch}(x) - 1} = \frac{x \text{sh}(x)}{\text{ch}(x) - 1}.$

Donc à $\lambda'(x) = x \text{sh}(x)$. Par I.P.P. on peut choisir comme primitive $\lambda(x) = x \text{ch}(x) - \text{sh}(x)$.

• Par théorème la forme générale des solutions de (E) sur chaque I_i est :

$$y(x) = \frac{x \text{ch}(x) - \text{sh}(x) + \lambda_i}{\text{ch}(x) - 1}$$

Remarque : une astuce permettrait d'aller plus vite ici en remarquant que le premier membre est la dérivée du produit $(\text{ch}(x) - 1)y(x)$.

Ainsi $(E) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} ((\text{ch}(x) - 1)y(x)) = x \text{sh}(x)$ et donc en primitivant (E) équivaut à $(\text{ch}(x) - 1)y(x) = x \text{ch}(x) - \text{sh}(x) + \lambda_i$ avec la même conclusion.

b) Considérons les solutions données au a) sur chaque I_i : si $\lambda_i \neq 0$ alors le numérateur tend vers λ_i en 0 et le dénominateur tend vers 0 donc la solution ne peut pas se prolonger par continuité en 0.

Donc il y a *une seule* solution *candidate* à être solution sur $\mathbb{R}$ à savoir $x \mapsto \frac{x \text{ch}(x) - \text{sh}(x)}{\text{ch}(x) - 1}.$

Pour savoir si elle est vraiment solution, il suffit de savoir si cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour montrer que la fonction est dérivable, on va exhiber un DL_1 .

Au dénominateur $\text{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$. Donc le D.L. du numérateur devra être divisé par x^2 : on a donc besoin d'un DL_3 au numérateur.

Or $\text{num}(x) = x \text{ch}(x) - \text{sh}(x) = x(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - (x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)).$

Donc $\text{num}(x) = \frac{x^3}{3} + o(x^3).$

D'autre part $\text{den}(x) = \text{ch}(x) - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^3) = \frac{x^2}{2} (1 + o(x)).$

Donc $f(x) = \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^2}{2} (1 + o(x))} = \frac{\frac{2x}{3} + o(x)}{1 + o(x)} = (\frac{2x}{3} + o(x))(1 + o(x)) = \frac{2x}{3} + o(x).$

Cette fonction admet en particulier un DL_1 donc est bien dérivable en 0.

Conclusion : l'E.D. admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui est la fonction f .

Exercice 2. a) (i) On considère $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - \cos(x)$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = 1 + \sin(x) \geq 0$ et φ est croissante sur $\mathbb{R}$.

En outre φ' ne s'annule sur aucun intervalle (l'ensemble des zéros de φ' est $\{-\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ qui est d'intérieur vide) donc φ est *strictement* croissante.

Enfin comme $\cos$ est borné, $\cos(x) = o(x)$ quand $x \rightarrow \pm\infty$ donc $\varphi(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} x$ donc $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$.

Par continuité, stricte monotonie, et les limites qu'on vient de trouver, on conclut (thème de la bijection) que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Donc il existe unique $a \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(a) = 0$ et donc f admet un unique point fixe, noté a .

Pour la deuxième question, remarquons que $\varphi(0) = -1$ et $\varphi(1) = 1 - \cos(1) \geq 0$ donc que $a \in [0, 1]$.

(ii) Remarquons que pour $x \in [0, 1] \subset [0, \pi/2]$, on a $\cos(x) \in [0, 1]$, l'intervalle $[0, 1]$ est donc stable par $\cos$ et comme $v_0 = 1 \in [0, 1]$, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \in [0, 1]$.

D'autre part, $\forall x \in [0, 1], |\cos'(x)| = |\sin(x)| = \sin(x) \in [0, \sin(1)]$ par croissance du sinus.

Par inégalité des accroissements finis, on en déduit que $\cos$ est $\sin(1)$ -lipschitzienne sur $[0, 1]$.

En particulier, comme pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \in [0, 1]$, on a $|\cos(v_n) - \cos(a)| \leq \sin(1)|v_n - a|$ autrement dit, $|v_{n+1} - a| \leq \sin(1)|v_n - a|$ ($\dagger$).

Montrons alors par récurrence la propriété annoncée par l'énoncé : $H(n) : |v_n - a| \leq \sin(a)^n |v_0 - a|$.

- La propriété $H(0)$ est triviale.

- Supposons $H(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$, on a alors $|v_{n+1} - a| \leq \sin(1)|v_n - a| \leq \sin(1)\sin(1)^n |v_0 - a|$, la première inégalité par ($\dagger$), la seconde par $H(n)$.

On conclut bien que $H(n+1)$ est vraie et la récurrence est établie. $\square$

(iii) Comme la fonction $\cos$ est décroissante sur $[0, 1]$, intervalle stable, on sait par résultat de cours, que les deux suites extraites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont monotones, de monotonies opposées (*).

Comme on a montré au (ii) que (v_n) converge vers a , alors (v_{2n}) et (v_{2n+1}) convergent aussi vers a et donc $v_{2n} - v_{2n+1} \rightarrow 0$, ce qui avec (*) donne bien que (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont adjacentes.

(iv) Comme (v_{2n+1}) croît et (v_{2n}) décroît, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_1 \leq v_n \leq v_0$ et $v_1 \leq a \leq v_0$.

Or par T.A.F., pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe un x_n compris entre a et v_n tel que $f(v_n) - f(a) = f''(x_n)(v_n - a) = \sin(x_n)(v_n - a)$.

A fortiori $x_n \in [v_1, v_0] = [v_1, 1]$.

Comme le sinus est positif, croissant sur $[0, 1]$, on a $|f(v_n) - f(a)| \geq \sin(v_1)|v_n - a|$ autrement dit $|v_{n+1} - a| \geq \sin(v_1)|v_n - a|$.

Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, |v_n - a| \geq \sin(v_1)^{n-1}|v_1 - a| \geq \sin(v_1)^{n-1}|v_1 - v_3|$ puisque $v_1 \leq v_3 \leq a$ ce qui, avec les données de l'énoncé donne exactement l'inégalité demandée :

$$\forall n \geq 1, |v_n - a| \geq \frac{1}{10 \times 2^{n-1}}.$$

b) (i) Or $f(\mathbb{R}) = [-1, 1], f^{\circ 2}(\mathbb{R}) = f([-1, 1]) = f([0, 1])$ par parité et $f([0, 1]) = [f(1), f(0)] = [f(1), 1]$ par continuité et décroissance. Remarquons que $1 = v_0$ et que $f(1) = v_1$ donc $f([0, 1]) = [v_1, v_0]$ et ainsi $f^{\circ 2}(\mathbb{R}) = [v_1, v_0]$. De même $f^{\circ 3}(\mathbb{R}) = [f(v_0), f(v_1)] = [v_1, v_2]$ encore par décroissance et $f^{\circ 4}(\mathbb{R}) = [f(v_2), f(v_1)] = [v_3, v_2]$.

Ainsi on obtient par réc. immédiate :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, f^{\circ 2n}(\mathbb{R}) = [v_{2n-1}, v_{2n-2}] \text{ et } f^{\circ (2n+1)}(\mathbb{R}) = [v_{2n-1}, v_{2n}]$$

(ii) Les suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) étant adjacentes, de limite a , alors :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{\circ n}(\mathbb{R}) = \{a\}$$

où a est la limite commune aux suites (v_{2n+1}) et (v_{2n}) .

(Si on veut c'est le théorème des segments emboîtés).

(iii) *Analyse* : si une telle suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_0 = f(u_1) = f^{\circ 2}(u_2) = \dots = f^{\circ n}(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $u_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{\circ n}(\mathbb{R}) = \{a\}$, ce qui donne donc une unique valeur de u_0 candidate

Réciproquement : pour $u_0 = a$, on peut prendre la suite constante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = a$, qui vérifie bien la relation $u_n = \cos(u_{n+1})$.

Donc la suite (u_n) est bien définie si, et seulement si, $u_0 = a$.

PROBLÈME :

1) a) Pour f affine comme dans l'énoncé $|f(x) - f(y)| = |a| \cdot |x - y|$. Donc f est une dilatation ssi $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |a| \cdot |x - y| \geq |x - y|$ ce qui équivaut à $|a| \geq 1$.

1) b) Si f est une dilatation et x, y sont donc réels tels que $f(x) = f(y)$ alors $|f(x) - f(y)| = 0$ donc $|x - y| = 0$ donc $x = y$.

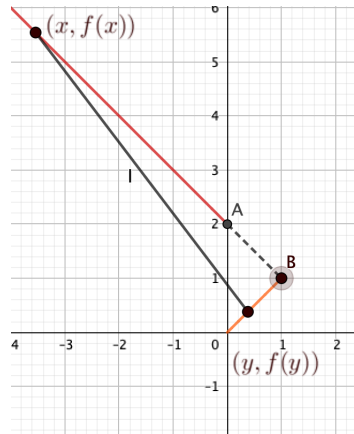
Ainsi f est *injective*. Comme f est continue, injective, sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on sait par théorème que f est *strictement monotone*.

1) c) Notons $I_1 =]-\infty, 0]$, $I_2 =]0, 1]$ et $I_3 =]1, +\infty[$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. SRdG on suppose $x \leq y$.

• Si x et y sont dans le même intervalle I_i (pour $i = 1, 2, 3$) alors $|f(x) - f(y)| = |x - y| \geq |x - y|$ car $f|_{I_i}$ est une fonction affine de pente ± 1 .

• Si $x \in I_1$ et $y \in I_2$, alors considérons le dessin ci-dessous :

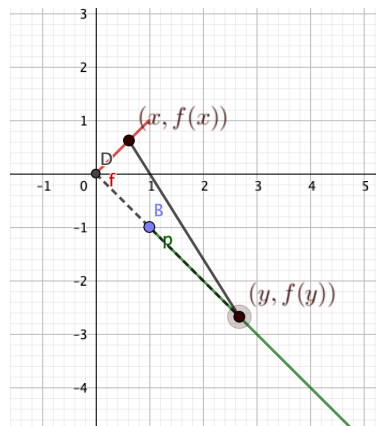


La pente entre les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ est toujours négative et la droite passant par ces deux points est toujours en dessous de la droite (AB) qui a simplement la droite d'équation $y = -x + 2$, de pente 1.

Donc on a bien, sur le dessin, $\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \geq 1$.

De manière formelle : comme le demi-plan fermé situé en dessous de la droite (AB) est un ensemble convexe, et que $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ sont dans ce demi-plan, le segment $[(x, f(x)), (y, f(y))]$ reliant ces deux points est dans ce demi-plan donc sa pente est négative, inférieure ou égale à -1.

• Si $x \in I_2$ et $y \in I_3$: le raisonnement est analogue, comme illustré ci-dessous : toutes les pentes sont négatives entre x et y et plus négative que celle de la droite d'équation $y = -x$, droite (DB) du dessin.



1) d) Comme f est croissante, f est une dilatation ssi pour tout $x \leq y$ dans $\mathbb{R}$, $f(y) - f(x) \geq y - x$ donc ssi pour tout $x \leq y$ dans $\mathbb{R}$, $f(y) - y \geq f(x) - x$ ce qui est la définition de φ croissante.

1) e) Pour f dérivable sur $\mathbb{R}$, montrons que f est une dilatation ssi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f'(t)| \geq 1$.

Sens $\Rightarrow$: on a f dilatation donc pour tout x, y dans $\mathbb{R}$ avec $x \neq y$, $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \geq 1$.

Pour x fixé, et par passage à la limite dans cette inégalité pour $y \rightarrow x$, on a $|f'(x)| \geq 1$.

Sens $\Leftarrow$: on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ $|f'(t)| \geq 1$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par T.A.F. il existe un t compris entre x et y tel que $|f(x) - f(y)| = |f'(t)| \cdot |x - y|$.

Comme $|f'(t)| \geq 1$, on conclut bien que $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$.

1) f) Pour $f = \text{sh}$, on a $f' = \text{ch} \geq 1$ sur $\mathbb{R}$, en particulier $|f'| \geq 1$ et f est une dilatation sur $\mathbb{R}$, par le e).

2) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(0)| \geq |x - 0|$ (1). Si f croissante et $x \geq 0$, $|f(x) - f(0)| = f(x) - f(0)$ (2).

Avec (1) et (2), on a pour $x \geq 0$, $f(x) - f(0) \geq x$ donc $f(x) \geq x + f(0)$.

Par théorème de minoration par une fonction tendant vers $+\infty$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

b) De même si f est croissante, pour $x \leq 0$, on a $|f(x) - f(0)| = f(0) - f(x)$.

Donc pour $x \leq 0$ l'inégalité $|f(x) - f(0)| \geq |x - 0|$ devient $f(0) - f(x) \geq -x$ donc $f(x) \leq f(0) + x$.

Par majoration par $f(0) + x$, on en déduit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$.

Comme f est continue, strictement croissante et que $\lim_{\pm\infty} f = \pm\infty$, on conclut (théorème de la bijection) que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

c) Dans le cas où f est strictement décroissante, on montre comme au a) et au b) que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$.

De même qu'au b), on conclut que f est encore bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3) a) i) On sait que $f([a, b]) \subset [a, b]$ donc $f(a)$ et $f(b)$ sont dans a et b . Comme f est croissante $f(a) \leq f(b)$.

Au total $a \leq f(a) \leq f(b) \leq b$ (1)

Mais comme f est une dilatation, $f(b) - f(a) \geq b - a$ (2).

Donc avec (1) et (2), $f(b) = b$ et $f(a) = a$ car par l'absurde si l'une des deux inégalités dans (1) était stricte alors $f(b) - f(a) < b - a$, ce qui contredit (2).

(ii) Soit $x \in [a, b]$. On sait que $f(x) \in [a, b]$ par stabilité, et que $f(x) - f(a) \geq x - a$ car f est dilatante, croissante autrement dit, $f(x) - a \geq x - a$ puisque $f(a) = a$.

Donc $f(x) \geq x$ (1).

En faisant le même raisonnement avec b à la place de a , on a $f(x) - b \geq b - x$ donc $f(x) \leq x$ (2).

Avec (1) et (2) on conclut que $f(x) = x$ et cela pour tout $x \in [a, b]$ donc $f|_{[a, b]} = \text{id}_{[a, b]}$.

b) Si f est décroissante, on note φ l'application affine décroissante $x \mapsto -x + (a + b)$ qui vérifie $\varphi(a) = b$ et $\varphi(b) = a$.

Alors $g = \varphi \circ f$ est encore une dilatation, croissante qui laisse $[a, b]$ stable. Donc par a), $g|_{[a, b]} = \text{id}_{[a, b]}$.

Donc $\varphi \circ f|_{[a, b]} = \text{id}_{[a, b]}$. Donc $f|_{[a, b]} = \varphi|_{[a, b]}^{-1} = \varphi|_{[a, b]}$: $x \mapsto -x + (a + b)$.

4) a) On a déjà vu au 2) a), que si f est croissante, alors pour tout $x \geq 0$, $f(x) - f(0) \geq x - 0$. Donc $f(x) \geq x + f(0)$.

Avec l'hypothèse de l'énoncé, on a alors pour tout $x \geq 0$, $x + f(0) \leq f(x) < x$. Les deux termes extrêmes de l'encadrement sont équivalents à x , donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ par théorème des gendarmes.

Le raisonnement qui suit donne directement que le graphe de f a une asymptote d'équation $y = x + \ell$ en $+\infty$, ce qui redonne en particulier l'équivalent :

D'autre part, on a vu au 1) d) que comme f est une dilatation croissante, $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ est croissante.

De plus l'hypothèse $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x$ dit que φ est majorée par 0. Donc par théorème de la limite monotone φ a une limite finie $\ell \leq 0$ en $+\infty$.

Donc $f(x) - x - \ell \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et donc la droite d'équation $y = x + \ell$ est asymptote à Γ_f en $+\infty$.

b) Cette fois la fonction φ est positive sur $\mathbb{R}$. Donc en $-\infty$, φ étant croissante minorée par 0, admet une limite finie $\lambda \geq 0$.

Et donc $f(x) - (x + \lambda) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

c) Soient $a \leq b$ deux points fixes de f . Comme f est croissante, l'intervalle $[a, b]$ est stable par f : en effet pour $a \leq x \leq b$, on a $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ par croissance, et donc $a \leq f(x) \leq b$ puisque a et b sont fixes.

Mais alors on peut appliquer le 3) a) puisqu'on a les mêmes hypothèses f dilatation croissante laissant stable $[a, b]$, $f|_{[a, b]} = \text{id}_{[a, b]}$, donc $[a, b] \subset F$.

On a bien montré que F est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle.

5) Comme f est strictement croissante, on sait que f^{-1} est aussi strictement croissante. Comme (u_n) est définie par $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ et f^{-1} est croissante, on sait que (u_n) est *monotone*. On sait aussi que les intervalles $] -\infty, \alpha]$ et $[\beta, +\infty[$ sont stables par f^{-1} .

D'autre part, comme vu au 1) d), la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et comme φ est nulle sur $[\alpha, \beta]$, on a $\varphi|_{]-\infty, \alpha[} < 0$ et $\varphi|_{] \beta, +\infty[} > 0$.

On distingue trois cas :

• **1er cas** : $u_0 < \alpha$. Dans ce cas pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \alpha$ par stabilité de $] -\infty, \alpha]$ par f . Comme $\varphi|_{]-\infty, \alpha[} < 0$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) - u_n < 0$. Mais par déf. $u_n = f^{-1}(u_{n-1})$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n-1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

La suite (u_n) est donc croissante, majorée par α , donc converge vers un $\ell \in] -\infty, \alpha]$.

En outre par continuité de f^{-1} , (u_n) ne peut converger que vers un point fixe de f^{-1} .

Or (cf. micro-lemme ci-dessous), les points fixes de f^{-1} sont les mêmes que les points fixes de f . Donc le seul point fixe de f dans $] -\infty, \alpha]$ est α .

On vient bien de montrer que (u_n) tend, en croissant strictement, vers α .

Micro-lemme : Soit $\ell \in \mathbb{R} : f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell = f^{-1}(\ell)$

Démonstration : par définition de f^{-1} , $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. □

• 2ème cas : $u_0 \in [\alpha, \beta]$. La suite (u_n) est constante égale à u_0 puisque tous ces points sont fixes par f^{-1} (cf. micro-lemme ci-dessus).

• 3ème cas : $u_0 \in] \beta, +\infty[$. Le même raisonnement qu'au 1er cas, adapté avec $\varphi < 0$, montre que (u_n) tend en décroissant strictement, vers β .

Remarque : dans cette question, la fonction f^{-1} est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, comme réciproque d'une fonction dilatante, mais n'a pas de raison d'être contractante au sens usuel i.e. k -lip avec $k < 1$. On ne peut pas utiliser le raisonnement connu pour les suites associées à des fonctions contractantes.

6) a) Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|f'(a)| < k < 1$ (les deux inégalités sont strictes, et c'est important). Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, on sait que $|f'(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} |f'(a)|$ et par déf. de la limite, il existe un $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [a - \alpha, a + \alpha]$, $|f'(x)| \leq k$.

Alors par inégalité des accroissements finis, on sait notamment que pour $x \in [a - \alpha, a + \alpha]$,

$$|f(x) - f(a)| \leq k|x - a| \leq |x - a| \leq \alpha.$$

Donc comme $f(a) = a$, $|f(x) - a| \leq \alpha$ et $f(x) \in [a - \alpha, a + \alpha]$. Ainsi $J = [a - \alpha, a + \alpha]$ est *stable* par f .

Mais mieux, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $x_n \in J$, $|f(x_n) - f(a)| \leq k|x_n - a|$ donc $|x_{n+1} - a| \leq k|x_n - a|$ et par récurrence immédiate (cf. ex. 2), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - a| \leq k^n|x_0 - a|$.

Donc (x_n) converge vers a , puisque $(x_n - a) = O(k^n)$ avec $0 \leq k < 1$.

b) Par l'égalité des accroissements finis, pour chaque n , il existe un c_n compris entre a et x_n tel que $f(x_n) - f(a) = f'(c_n)(x_n - a)$

Autrement dit : $x_{n+1} - a = f'(c_n)(x_n - a)$ ($\dagger$).

En particulier si $x_n - a \neq 0$ et f' ne s'annule pas sur J alors $x_{n+1} - a \neq 0$. Par réc. immédiate, on en déduit, comme demandé, que si $x_0 \neq a$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq a$.

Mais comme $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ et c_n est compris entre x_n et a , on sait, par théorème des gendarmes, que $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Par caractère $\mathcal{C}^1$ de f , on en déduit que $f'(c_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(a)$. Comme on a $f'(a) \neq 0$, on peut écrire $f'(c_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} f'(a)$ et en passant à l'équivalent dans ($\dagger$), on a, comme demandé :

$$\boxed{x_{n+1} - a \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} f'(a)(x_n - a).}$$

c) On fixe un k tel que $|f'(a)| > k > 1$. Comme au a), par déf. de la limite, il existe alors un $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [a - \alpha, a + \alpha]$, $|f'(x)| \geq k$ (1).

Par T.A.F. pour tout x, y dans $[a - \alpha, a + \alpha]$, il existe un $c \in [a - \alpha, a + \alpha]$ tel que $|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|$.

Par (1), en notant $J = [a - \alpha, a + \alpha]$ on en déduit que pour tout $(x, y) \in J^2$, $|f(x) - f(y)| \geq k|x - y|$.

Soit alors $x_0 \in J$. Supposons que tous les x_k pour $k = 0, 1, \dots, n$ sont dans J .

Alors pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $|x_{k+1} - a| = |f(x_k) - f(a)| \geq k|x_k - a|$ et donc par récurrence immédiate $|x_n - a| \geq k^n|x_0 - a|$.

Or si $x_0 \neq a$ alors $k^n|x_0 - a| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, ce qui rend $\boxed{\text{impossible que } (x_n) \text{ reste dans } J \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$, car pour $x_n \in J$, $|x_n - a| \leq \alpha$.

d) Par théorème sur la dérivée d'une fonction réciproque, pour $|f'(a)| > 1$, on sait que f' ne s'annule pas sur un voisinage V de a par caractère $\mathcal{C}^1$, et par théorème f^{-1} est alors dérivable sur $f(V)$ et pour tout $y \in V$, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

En particulier pour $y = a = f(a)$, on a $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(a)}$ et donc, comme $|f'(a)| > 1$, on en déduit que : $|(f^{-1})'(a)| < 1$.

Donc a est un point fixe attractif de f^{-1} .

7) a) (i) On calcule le dénominateur :

$$\begin{aligned} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n &= (x_{n+2} - \ell) - 2(x_{n+1} - \ell) + (x_n - \ell) \\ &= (k + \varepsilon_{n+1})(k + \varepsilon_n)(x_n - \ell) - 2(k + \varepsilon_n)(x_n - \ell) + (x_n - \ell) \\ &= (k^2 - 2k + 1 + k(\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n) + \varepsilon_n \cdot \varepsilon_{n+1} - 2\varepsilon_n) \cdot (x_n - \ell) \\ &= ((k-1)^2 + \eta_n)(x_n - \ell) \end{aligned}$$

où $\eta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Comme $(k-1)^2 \neq 0$, on en déduit que $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (k-1)^2(x_n - \ell)$ et que ce dénominateur ne s'annule pas A.P.C.R.

(ii) On calcule maintenant :

$$\begin{aligned} y_n - \ell &= x_n - \ell - \frac{(x_{n+1} - \ell) - (x_n - \ell))^2}{((k-1)^2 + \eta_n)(x_n - \ell)} \\ &= x_n - \ell - \frac{((k + \varepsilon_n - 1)(x_n - \ell))^2}{((k-1)^2 + \eta_n)(x_n - \ell)} \\ &= x_n - \ell - \frac{(k + \varepsilon_n - 1)^2(x_n - \ell)}{((k-1)^2 + \eta_n)} \\ &= (x_n - \ell) \left(1 - \frac{(k + \varepsilon_n - 1)^2}{((k-1)^2 + \eta_n)} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \left(1 - \frac{(k + \varepsilon_n - 1)^2}{((k-1)^2 + \eta_n)} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{(k-1)^2}{(k-1)^2} = 0 \text{ ce qui donne la conclusion.}$$

Culture : ce processus d'accélération de convergence s'appelle *méthode d'Aitken*. Il est relié aux méthodes d'accélération de convergence décrites dans le DS 6 2019/2020 I 3) (méthode de Romberg), sauf qu'on remplace ici le k de la méthode de Romberg où $x_{n+1} - \ell \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} k(x_n - \ell)$ par $(x_{n+2} - x_{n+1})/(x_{n+1} - x_n)$ qui tend vers k).

b) La méthode de Steffensen :

(i) Avec la dernière expression de g donnée par l'énoncé, si $g(\ell) = \ell$ alors $\ell f^{\circ 2}(\ell) - f(\ell)^2 = \ell f^{\circ 2}(\ell) - 2\ell f(\ell) + \ell^2$. donc $f(\ell)^2 - 2\ell f(\ell) + \ell^2 = 0$ donc $(f(\ell) - \ell)^2 = 0$ donc $f(\ell) = \ell$.

(ii) Si $f(\ell) = \ell$ alors dans l'expression de $g(x)$, le dénominateur s'annule pour $x = \ell$. On étudie donc la limite quand $u \rightarrow 0$ de :

$$g(\ell + u) = \frac{(\ell + u) \cdot f^{\circ 2}(\ell + u) - f(\ell + u)^2}{f^{\circ 2}(\ell + u) - 2f(\ell + u) + \ell + u} \quad (1)$$

Or comme f est dérivable en ℓ ,

$$\begin{aligned} f(\ell + u) &= f(\ell) + uf'(\ell) + o(u) = \ell + uf'(\ell) + o(u) \quad \text{et donc} \\ f(\ell + u)^2 &= (\ell + uf'(\ell) + o(u))^2 = \ell^2 + 2\ell uf'(\ell) + o(u) \quad \text{par produit de D.L. d'un côté} \\ f^{\circ 2}(\ell + u) &= f(\ell + uf'(\ell) + o(u)) = f(\ell + v) \quad \text{avec } v = uf'(\ell) + o(u) \\ &= \ell + vf'(\ell) + o(v) = \ell + f'(\ell)^2 u + o(u) \quad \text{par composition des D.L.} \end{aligned}$$

En introduisant ces expressions dans (1), on obtient :

$$\begin{aligned} g(\ell + u) &= \frac{(\ell + u) \cdot (\ell + f'(\ell)^2 u + o(u)) - (\ell^2 + 2\ell uf'(\ell) + o(u))}{\ell + f'(\ell)^2 u + o(u) - 2(\ell + uf'(\ell) + o(u)) + \ell + u} \\ &= \frac{\ell^2 + \ell u + \ell f'(\ell)^2 u + o(u) - (\ell^2 + 2\ell uf'(\ell) + o(u))}{f'(\ell)^2 u - 2uf'(\ell) + u + o(u)} \\ &= \frac{u(\ell + \ell f'(\ell)^2 - 2\ell f'(\ell)) + o(u)}{u(f'(\ell)^2 - 2f'(\ell) + 1) + o(u)} \\ &= \ell \frac{(f'(\ell) - 1)^2 + o(1)}{(f'(\ell) - 1)^2 + o(1)} \end{aligned}$$

Avec l'hypothèse que $f'(\ell) - 1 \neq 0$, on conclut bien que $g(\ell + u) \xrightarrow[u \rightarrow 0]{} \ell$.

(iii) Le fait de prendre $\ell = 0$ ne restreint pas la généralité, en considérant sinon $\tilde{f}(x) = f(x + \ell) - \ell$. Alors comme f est de classe $\mathcal{D}^2$ en 0, alors par T.Y., elle admet un DL_2 , $f(x) = ax + bx^2 + o(x^2)$ et

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= (ax + bx^2 + o(x^2))^2 = a^2 x^2 + o(x^2) \\ (f \circ f)(x) &= f(ax + bx^2 + o(x^2)) = a(ax + bx^2) + b(ax)^2 + o(x^2) \\ &= a^2 x + (ab + a^2 b)x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x(a^2 x + (ab + a^2 b)x^2 + o(x^2)) - a^2 x^2 + o(x^2)}{a^2 x + (ab + a^2 b)x^2 + o(x^2) - 2(ax + bx^2 + o(x^2)) + x} \\ &= \frac{o(x^2)}{(a^2 - 2a + 1)x + (ab + a^2 b - 2b)x^2 + o(x^2)} = o(x) \end{aligned}$$

Donc comme $g(0) = 0$, $\frac{g(x) - g(0)}{x} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$ c'est-à-dire $g'(0) = 0$.

En particulier $|g'(0)| < 1$ donc 0 est bien un point fixe *attractif* de g .

Remarque : on verra même, dans le chapitre sur la méthode de Newton, qu'avec $g'(0) = 0$, on a ce qu'on appelle un point fixe *super attractif* : convergence très rapide (mieux que géométrique).