MPSI 1 **Samedi 16 Mars 2019**

Mathématiques D.S. 6, 3 heures 30

Les calculatrices et téléphones ou autres tamagoshi sont interdits.

Problème 1 : une étude de fonction à partir d'une E.D.

1.1. Une équation différentielle :

a) Résoudre sur $I =]-1,0[$ et $J =]0,+\infty[$ l'E.D. suivante d'inconnue $x \mapsto y(x)$:

$$y'(x) + \frac{1-x}{2x(x+1)}y(x) = 0$$

b) Calculer pour $a > 0$ et $x > 0$, $\displaystyle\int_a^x \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t}}$ à l'aide d'un changement de variable $u = \sqrt{t}$.

c) Déterminer les solutions sur $J =]0,+\infty[$ de l'E.D. :

$$y'(x) + \frac{1-x}{2x(x+1)}y(x) = \frac{1}{2x}.$$

d) Montrer que parmi les solutions du c), il y en a une seule qui admet une limite finie en 0.

1.2. Une étude de fonction :

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$. Soit Γ le graphe de f.

a) (i) Montrer que f admet un D.L. à tout ordre n en 0^+ et préciser ce développement.
(ii) En déduire l'allure locale de Γ en 0 : équation de la tangente à Γ en 0, et position locale de Γ par rapport à cette tangente.

b) (i) Montrer que f admet, au voisinage de ∞, un développement asymptotique qu'on écrira avec trois termes significatifs et un $o(\dfrac{1}{\sqrt{x}})$.
(ii) En déduire que Γ admet une courbe asymptote d'équation $y = a\sqrt{x} + b$ (parabole horizontale), qu'on précisera, en donnant aussi la position de Γ par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

c) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
Indication – Pour l'étude du signe de f', on sera un peu courageux... en se souvenant d'études de signes faites au chap. B.

d) Faire un tracé de l'allure supposée de Γ (on n'étudiera pas la convexité/concavité, on pourra supposer que f ne change pas de concavité/convexité).

1.3. Retour à l'E.D. de l'autre côté de 0 :

a) Déterminer les solutions sur $I =]-1,0[$ de l'E.D. :

$$y'(x) + \frac{1-x}{2x(x+1)}y(x) = \frac{1}{2x}.$$

b) Montrer qu'il y a au plus une solution du a) qui peut admettre une limite finie en 0. On la note g.

c) Montrer que la fonction g admet un DL à tout ordre n en 0^- (ce qui montre en particulier que g a bien une limite finie en 0 mais bien plus) et préciser ce développement.
Commenter le résultat obtenu.

Problème 2 : Etude de familles de suites définies par récurrence.

2.0. Préambule : Démontrer le lemme de Cesaro suivant : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels convergente vers ℓ et si on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$ alors la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ.

Dans toute la suite de ce problème, on considère une fonction f de classe C^2 sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ telles que f' et f'' soient à valeurs positives. On suppose $f(1) = 1$, $f'(0) < 1$ et $f''(1) > 0$.
On considère de plus la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On pose $m = f'(1)$.

2.1) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, puis qu'elle est convergente. On note ℓ sa limite.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution. Dans toute la suite, on la notera x_f.

c) Montrer que $\ell = x_f$.

2.2) On suppose $m > 1$. Montrer que $x_f \in [0, 1[$.

2.3) On suppose maintenant $m \leq 1$.

a) Montrer que $x_f = 1$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

c) en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.

2.4) Dans cette question, on suppose $m = 1$.

a) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1 - u_n$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n}\right) = \frac{f''(1)}{2}$$

b) En déduire que, quand n tend vers l'infini, $1 - u_n = \varepsilon_n \sim \dfrac{2}{nf''(1)}$.

Problème 3 : point fixe pour les applications contractantes

Rappels de définition : un intervalle *fermé* de $\mathbb{R}$ est un intervalle ayant l'une des trois formes $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ où $a \leq b$ sont des réels.

Si $I \subset \mathbb{R}$ une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *contractante* ssi

$$\exists\, k \in]0, 1[,\ \forall\, (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Le but de ce petit problème est de démontrer les deux théorèmes suivants :

Théorème 1 (théorème du point fixe) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé et $f : I \to I$ une application contractante, alors f possède un unique point fixe dans I.

Théorème 2 (généralisation) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé et $f : I \to I$ telle qu'il existe une puissance $f^{\circ n}$ de f pour la composition, qui est contractante, alors f admet aussi un unique point fixe dans I.

a) Soit f vérifiant les hypothèses du théorème 1. Montrer que si f a un point fixe dans I alors celui-ci est unique.

b) On suppose dans cette question seulement que I est un intervalle fermé *borné*, de la forme $I = [a, b]$. Montrer dans ce cas l'existence d'un point fixe pour toute fonction *continue* de I dans I, et expliquer que ceci achève la démonstration du théorème 1 dans ce cas particulier des intervalles fermés *bornés.*

c) On suppose donc maintenant que I est un intervalle fermé non borné et $f : I \to I$ contractante de rapport $k < 1$.

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - x$.

i) Montrer que si $x \leq y$ sont deux éléments de I alors :

$$\varphi(y) \leq \varphi(x) + (k - 1)(y - x).$$

ii) En déduire que φ est strictement décroissante sur I.

iii) Déduire aussi du i) qu' alors $\varphi(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \mp\infty$.

N.B. Une des deux limites $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ est possible dans I car I est non borné.

iv) En déduire la preuve de la conclusion du théorème 1 dans le cas où I est non borné.

d) Démontrer le théorème 2 (existence et unicité).

e) Un exemple pour le théorème 2.

Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ ne contenant ni 0 ni 1.

Soit $f = \chi_E$ la fonction caractéristique de E définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in E, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Montrer que f est *discontinue* mais que $f \circ f$ est contractante. Quel est le point fixe de f ?

f) Un contre-exemple pour le théorème 1 si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$.

Soit $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto \dfrac{1}{2}\dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$. Montrer que f est contractante mais que f n'admet pas de point fixe dans $\mathbb{Q}$.