

D.M. 11 : limites sup., limites inf., suites à croissances lentes, solution

1) La limite sup. et la limite inf. d'une suite réelle bornée

a) Existence de la limite sup et de la limite inf.

(i) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme, en termes d'ensembles :

$$\{u_k, k \geq n\} \supset \{u_k, k \geq n+1\},$$

on en déduit, par propriété des sup., que

$$\sup\{u_k, k \geq n\} \geq \sup\{u_k, k \geq n+1\}$$

donc que $v_n \geq v_{n+1}$. La suite (v_n) est donc décroissante.

De même par prop. des inf. d'ensembles, $\inf\{u_k, k \geq n\} \leq \inf\{u_k, k \geq n+1\}$ et $w_n \leq w_{n+1}$.

La suite (w_n) est donc croissante.

(ii) **Remarque :** pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq u_n \geq w_n$.

Preuve de la remarque : pour n fixé, $v_n = \sup\{u_k, k \geq n\} \geq u_n$ car $u_n \in \{u_k, k \geq n\}$. De même pour w_n .

(iii) *Application de la remarque :* Comme (u_n) est bornée et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq u_n$, on en déduit que (v_n) est minorée.

De même (w_n) est majorée.

(iv) Conclusion : avec le (i) et le (iii), (v_n) est décroissante minorée donc CV et (w_n) est croissante majorée donc converge.

b) Montrer que $\limsup u_n$ est une valeur d'adhérence de (u_n)

On veut construire une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) qui converge vers $l_1 = \limsup u_n$.

On construit la fonction d'extraction φ par récurrence :

• On pose $\varphi(0) = 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$: On suppose qu'on a construit $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n)$ des entiers tels que $|u_{\varphi(k)} - l_1| < 1/k$ pour tout $k \leq n$.

On sait, par a), que $v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l_1$ en décroissant.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$: on sait par déf. de la limite, qu'il existe un $k_0 > \varphi(n)$ tel que :

$$l_1 \leq v_{k_0} < l_1 + \frac{1}{n+1} \quad (1)$$

(car ceci est vrai pour tous les k assez grands).

Comme $v_{k_0} = \sup\{u_r, r \geq k_0\}$, par déf. du sup., il existe un $r_0 \geq k_0$ tel que :

$$l_1 - \frac{1}{n+1} < u_{r_0} \leq v_{k_0} \quad (2)$$

Alors avec (1) et (2), on a :

$$l_1 - \frac{1}{n+1} < u_{r_0} < l_1 + \frac{1}{n+1} \quad (3)$$

On pose $\varphi(n+1) = r_0$. On a bien $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et par (3) $|u_{\varphi(n+1)} - l_1| < 1/(n+1)$.

La récurrence est établie : on a construit par récurrence une fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante donc une fonction d'extraction telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)} - l_1| < 1/n$ donc $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l_1$.

Donc l_1 est une valeur d'adhérence de (u_n) .

c) La convergence de (w_n) a été prouvée au a). Le fait que l_2 est valeur d'adhérence se fait exactement comme au b).

2) La limite sup. est la plus grande v.a., la limite inf. est la plus petite, conséquences

- 2) a) Cet énoncé a été prouvé à la remarque du 1) a) (ii)
 b) Si $(u_{\varphi(n)})$ est une suite extraite de (u_n) qui CV vers un l , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{\varphi(n)} \leq u_{\varphi(n)} \leq v_{\varphi(n)}.$$

Or les suites deux $(v_{\varphi(n)})$ et $(w_{\varphi(n)})$ sont convergentes vers l_1 et l_2 comme suites extraites des suites (v_n) et (w_n) convergentes, et donc par conservation des inégalités larges par passage à la limite, on conclut que :

$$l_2 \leq l \leq l_1.$$

c) Si (u_n) admet une seule v.a. l en part. $l_1 = l_2 = l$ puisqu'on a vu que l_1 et l_2 sont deux v.a. de (u_n) . Avec le a), le théorème des gendarmes donne alors que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$.

3) Une propriété des suites à croissance lente i.e. telles que $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$

3) a) Par Cesaro (cf. pl. 30 ex. 2) on en déduit $u_n/n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ et donc si $l \neq 0$, $u_n \sim nl$ et si $l > 0$, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et si $l < 0$, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$.

N.B. Il fallait prouver que la limite existe bien dans $\overline{\mathbb{R}}$, ce qu'on obtient ici par Cesaro.

b) Par exemple si on pose $u_n = \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ mais $u_{n+1} - u_n = \ln(1 + 1/n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

c) Soit $\lambda \in]a, b[$. On veut construire une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) qui converge vers λ .

Méthode 1 : construction de la fonction φ par récurrence

Par réc. on suppose qu'on a construit $\varphi(0) < \dots < \varphi(n)$ tels que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_{\varphi(k)} \in [\lambda - \frac{1}{k}, \lambda + \frac{1}{k}]$.

On veut construire $\varphi(n+1)$: *Ce qui est en italique ne devrait pas être sur une copie.*

→ encore le principe de la flaque d'eau.

Supposons pour simplifier qu'on a $a < \lambda - \frac{1}{n+1} < \lambda < \lambda + \frac{1}{n+1} < b$ (ce n'est pas restrictif car vrai pour n assez grand).

On veut donc tomber dans la flaque $[\lambda - \frac{1}{n+1}, \lambda + \frac{1}{n+1}]$.

Réglons la largeur du pas. Comme $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$ il existe un $n_0 \geq \varphi(n)$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_{n+1} - u_n| < \frac{2}{n+1}$. *taille de la flaque dans laquelle on veut tomber*.

Maintenant on montre qu'on peut se placer à gauche de la flaque.

Comme a est limite de suite extraite de (u_n) , on a un $n_1 \geq n_0$ tel que $u_{n_1} \in [a - \frac{1}{n+1}, \lambda - \frac{1}{n+1}]$.

Mais on doit traverser la flaque pour aller voir b !

Comme b est limite de suite extraite de (u_n) , on a un $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} \in [\lambda + \frac{1}{n+1}, b + \frac{1}{n+1}]$.

Mais comme $n_1 \geq n_0$, en allant de u_{n_1} à u_{n_2} avec des pas de longueur inférieure strictement à la largeur de $[\lambda - \frac{1}{n+1}, \lambda + \frac{1}{n+1}]$ il existe un $n_3 \in \llbracket n_1, n_2 \rrbracket$ tel que $u_{n_3} \in [\lambda - \frac{1}{n+1}, \lambda + \frac{1}{n+1}]$.

Précisément, on obtient ce n_3 en définissant $n_3 - 1 = \max\{k \in \llbracket n_1, n_2 \rrbracket, u_k < \lambda - \frac{1}{n+1}\}$.

On pose par déf. $\varphi(n+1) = n_3$, ce qui donne la déf. de $(u_{\varphi(n)})$ par réc.

Méthode 2 : en utilisant la caractérisation des v.a. vue en cours du E1 avant B.W.

Rappel du lemme vu en cours : ℓ est limite d'une suite extraite de (u_n) ssi pour tout voisinage V de ℓ , $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in V\}$ est infini.

Intérêt de ce lemme : On n'a pas besoin de construire de suite.

Le lemme se reformule encore en disant que λ est v.a. de (u_n) ssi $\forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n_1 \geq n_0, u_{n_1} \in]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$.

Soit donc $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Sans restriction de généralité (quitte à diminuer ε) on suppose que : $a < \lambda - \varepsilon < \lambda + \varepsilon < b$.

Comme $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, on a un n'_0 tel que, pour $n \geq n'_0$, $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$.

Par a et b valeurs d'adhérences, il existe un $n_a \geq \max(n_0, n'_0)$ tel que $u_{n_a} < \lambda - \varepsilon$ et un $n_b > n_a$ tel que $u_{n_b} > \lambda + \varepsilon$.

Soit $n_1 = \max\{k \in \llbracket n_a, n_b \rrbracket, u_k \leq \lambda - \varepsilon\} + 1$. Alors on est sûr que $u_{n_1} > \lambda - \varepsilon$ et comme $n_1 > n'_0$ on sait que $|u_{n_1} - u_{n_1-1}| < \varepsilon$ donc que $u_{n_1} < \lambda + \varepsilon$. On a bien construit le u_{n_1} cherché.

d) Une application du résultat du c) : comme (u_n) est une suite bornée, d'après le 2) c), pour montrer que (u_n) converge, il suffit de montrer que $l_2 = l_1$ où $l_2 = \liminf u_n$ et $l_1 = \limsup u_n$.

Par l'absurde si $l_2 < l_1$. Comme $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on sait par c) que l'ensemble des v.a. de (u_n) est tout l'intervalle $[l_2, l_1]$.

Or si ℓ est une valeur d'adhérence de (u_n) , on a une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de (u_n) qui converge vers ℓ .

Alors d'un côté $u_{\varphi(n)+1} = f(u_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$ par continuité de f , et de l'autre côté, comme $u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $u_{\varphi(n)+1} = u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Par unicité de la limite, on conclut que $\ell = f(\ell)$.

Ainsi toutes les valeurs d'adhérences de (u_n) sont des points fixes de f , donc *tous les points de l'intervalle $[l_2, l_1]$ sont des points fixes de f* .

Mais si $l_2 < l_1$ et qu'on prend un $\ell \in]l_2, l_1[$, comme on a une suite extraite de (u_n) qui converge vers ℓ en fixant un ε tel que $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\subset]l_1, l_2[$, on a un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in]l_1, l_2[$.

Mais alors u_{n_0} est un point fixe de f , et la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est *constante* donc n'a qu'une seule v.a. *contradiction*.

Donc $l_1 = l_2$ et (u_n) converge.

4) Un énoncé proche, mais avec un résultat bien différent :

(M1) celle naturelle mais pas facile en prépa, exo (*)

Si on pose $v_n = 2u_n - u_{n-1}$, on a $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$

L'écriture $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}v_n$ donne $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}a + \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

On peut alors voir (u_n) comme une suite arithmetico-géométrique perturbée, par une perturbation ε_n qui tend vers zéro.

On considère d'abord l tel que $l = \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}a$ ici cela donne $l = a$.

On va montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ (comme dans le cas des suites arithmético-géométriques).

Alors $u_n - a = \frac{1}{2}(u_{n-1} - a) + \varepsilon_n$.

Donc en posant $w_n = u_n - a$, on est ramené à montrer que $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|\varepsilon_n| < \varepsilon$.

Alors pour tout $n \geq n_0$, $\frac{1}{2}w_{n-1} - \varepsilon < w_n \leq \frac{1}{2}w_{n-1} + \varepsilon$.

Posons (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_{n_0} = w_{n_0} = b_{n_0}$ et pour tout $n \neq n_0$, $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - \varepsilon$ et $b_n = \frac{1}{2}b_{n-1} + \varepsilon$.

On a alors pour tout $n \geq n_0$, $a_n \leq w_n \leq b_n$.

Mais $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\varepsilon$ et $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\varepsilon$.

Donc on a un N tel que pour tout $n \geq N$, $-2\varepsilon < a_n < w_n < b_n < 2\varepsilon$.

Ceci montre que $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(M2) Avec des propriétés super-efficace mais très H.P. de limsup et liminf

Propriété – si (a_n) et (b_n) sont deux suites bornées, alors $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$ et $\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$.

Preuve en exercice, pas difficile. N.B. on n'a pas forcément égalité

La prop. ci-dessus est super-efficace ici : pour $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}a + \varepsilon_n$, on a

$\limsup u_n \leq \frac{1}{2} \limsup u_{n-1} + \frac{1}{2}a + \limsup \varepsilon_n$ i.e.

en notant $l_1 = \limsup u_n$, $l_1 \leq \frac{1}{2}l_1 + \frac{a}{2}$ donc $l_1 \leq a$.

En passant à la limite inf. l_2 , on a l'inégalité dans l'autre sens $l_2 \geq a$.

Mais comme $l_2 \leq l_1$, on conclut que $l_1 = l_2 = a$, donc que la suite converge vers a .

Et on a fait cela sans ε !