

Planche (*) : compléments sur les parties denses dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 (Des parties denses importantes : des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$). a) Rappeler, avec démonstration, la forme de tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ (théorème du cours du C1).

b) Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ différent des deux sous-groupes triviaux $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.

Soit $\alpha = \inf(H \cap \mathbb{R}^{++})$.

Montrer que si $\alpha > 0$ alors $\alpha \in H$ puis que $H = \alpha\mathbb{Z}$.

c) Montrer que si $\alpha = 0$ alors H est dense dans $\mathbb{R}$.

On vient de démontrer le :

Théorème de classification des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ (H.P. mais à connaître au niveau Mines-Pont) : tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (Application à la somme de deux sous-groupes discrets). Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $a/b \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3 (Application au groupe des périodes d'une fonction). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque.

On note $\Pi_f = \{T \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$.

a) A quelle condition sur l'ensemble Π_f la fonction f est-elle périodique ?

b) Justifier que Π_f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

c) On a vu en exercice ci-dessus la forme des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.

(i) Montrer que si $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ alors Π_f est dense.

(ii) Montrer que si f est continue non constante alors Π_f ne peut pas être dense. En déduire que si f est une fonction périodique continue non constante, f admet bien une plus petite période strictement positive.

Dans ce qui suit, on dit qu'une partie $C \subset A$ est dense dans A ssi tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de C .

Exercice 4 (Propriété clef transportée par les fonctions continues surjectives : transmission de la densité). Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $f : A \rightarrow B$ continue surjective.

On suppose que $C \subset A$ est dense dans A . Montrer que $f(C)$ est dense dans B .

Exercice 5 (Application à des nombreuses parties denses). Montrer que

a) $A = \{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

b) $B = \{\tan(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6 (Et dans $\mathbb{C}$?). a) Montrer que si $z = e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha/2\pi \notin \mathbb{Q}$, la suite $(z^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathbb{U}$.

b) Classification des suites géométriques de raison $q \in \mathbb{U}$:

Soit $q \in \mathbb{U}$ et (z_n) la suite géométrique définie par la donnée d'un $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = qz_n$.

On note $\alpha = \text{Arg}(q)$.

(i) Que dire de la suite (z_n) si $\alpha/2\pi \in \mathbb{Q}$?

(ii) Que dire de la suite (z_n) si $\alpha/2\pi \notin \mathbb{Q}$?

c) Que dire alors du comportement d'une suite géométrique de rapport $z \in \mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$ (seulement deux comportements possibles, à préciser).

d) Généraliser au cas où $|q| > 1$: dans ce cas, on sait que $|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, mais que dire de la suite $(\text{Arg}(z_n))$?