

E2 : Etude pratique de suites réelles

Suites de la forme $u_n = f(n)$

On a tous les outils des limites de fonctions, et des propriétés particulières avec n entier parfois, revoir calculs de limites du B2

Exercice 1. Etudier les limites des suites (u_n) définies par $\forall n \in \mathbb{N}$: a) $u_n = \sqrt[n]{n^2}$, b) $u_n = \sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2 + n + 1}$, c) $u_n = \sqrt[3]{n^2 + 2n + 3} - \sqrt[3]{n^2 + n + 1}$, d) $u_n = \sin\left(\frac{n^2 + 2n + 3}{n + 1}\pi\right)$ e) $u_n = \left(\tan\left(a + \frac{b}{n}\right)\right)^n$ avec $a \in]0, \pi/2[$ et $b > 0$.

Exercice 2 (Un exemple avec une partie entière). Soit $\lambda > 0$ et $x > 0$. Etudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{[nx]}$.

Exemple de suites définies par des sommes : penser à encadrer

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$ et $w_n = \sqrt[n]{3 + (-1)^n}$. Etudier les limites des suites (u_n) , (v_n) , (w_n) .

Exercice 4 (Exemple différent... reconnaître une...). Soit $a > 0$. Etudier la limite de (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{a^k}$.

Exercice 5 (Un Encadrement plus subtil !). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}$.
A l'aide d'un encadrement, montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

Suites définies implicitement

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1} + \dots + 2x - 1 = \sum_{k=1}^n (k+1)x^k - 1$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet une unique racine dans $]0, +\infty[$. On note x_n cette racine.

b) Montrer que la suite (x_n) est décroissante, et qu'elle converge.

c) Déterminer la limite de (x_n) .

Indication pour le c) - P_n ressemble à une dérivée...

Exercice 7. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

a) montrer qu'il existe un unique réel x_n tel que $\exp(x_n) + x_n = n$.

b) Montrer que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

c) Déterminer un équivalent de x_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Suites de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 8. Etudier, suivant la valeur de $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^3 - 6u_n^2 + 12u_n - 6$.

Indication - On trouvera des valeurs explicites pour la limite de (u_n) dans les cas où elle converge.

Exercice 9 (Un cas où f est décroissante, mais contractante). Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n^2}$. Etudier la convergence éventuelle de (u_n) .