Le coin des axiomes

Exercice 1 (Une axiomatique avec l'ordre au lieu de Peano)**.** On peut définir $\mathbb{N}$ comme un ensemble *ordonné* vérifiant les trois propriétés suivantes :

P1 Toute partie non vide admet un plus petit élément
P2 Toute partie non vide majorée admet un plus grand élément
P3 L'ensemble $\mathbb{N}$ lui-même n'est pas majoré.
a) Justifier que l'ordre dans $\mathbb{N}$ est total.
b) Comment définir le *successeur* d'un entier n avec ces axiomes ?
c) Déduire alors le théorème de récurrence de **(P1)**.

Des ordres ailleurs que dans $\mathbb{R}$

Exercice 2. On munit $\mathbb{N}^2$ de l'ordre lexicographique.

a) Une partie non vide a-t-elle toujours un plus petit élément ?

b) Une partie non vide majorée a-t-elle toujours un plus grand élément ?

Exercice 3. On veut montrer le résultat annoncé en cours qu'il n'existe pas d'ordre total $\leq$ sur $\mathbb{C}$ compatible avec + et compatible avec $\times$ sur l'ensemble des nombres positifs.
a) Montrer que pour un tel ordre, si $z < 0$ alors $-z > 0$.
b) Montrer que pour un tel ordre, on aurait $\forall\, z \in \mathbb{C}^*,\ z^2 > 0$.
c) Conclure à une contradiction.

Pour tout le monde : exemple de sup.

Exercice 4. Soit $A = \{\dfrac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et $B = \{\dfrac{n}{mn+1},\ m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*\}$.
Déterminer, s'ils existent, sup et inf de A et de B. Préciser si ce sont des max. ou des min.

Exercice 5. Déterminer $\sup(\mathbb{Q}\cap]0,1[)$ et $\inf(\mathbb{Q}\cap]0,1[)$.

Pour tout le monde : prop. élémentaires des sup., inf.

Exercice 6. a) Si $A \neq \varnothing$ et $A \subset B \subset \mathbb{R}$ et si B admet un sup, montrer que A aussi et que $\sup A \leq \sup B$. Donner l'énoncé analogue pour les inf.

b) On suppose que A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, non vides, majorées. Montrer que $\sup(A\cup B)$ existe et l'exprimer en fonction de $\sup A$ et $\sup B$.

c) On considère A partie non vide bornée de $\mathbb{R}$. On note $B = \{-a, a \in A\}$, exprimer $\sup B$ et $\inf B$ en fonction de $\sup A$ et $\inf A$.

d) On considère A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides, majorées. On note $C = A + B = \{a+b,\ a \in A,\ b \in B\}$. Montrer que C a un sup, qu'on exprimera en fonction de $\sup A$ et $\sup B$.

Exercice 7. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide majorée sans plus grand élément. Montrer que : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, (x,y) \in A^2,\ 0 < y - x < \varepsilon$.

Exercice 8 (Cours)**.** Au tout début du B1, on a dit que, par définition, une partie $I \subset \mathbb{R}$ est un *intervalle* si, et seulement si, pour tout $(a,b) \in I^2$, $a \leq b \Rightarrow [a,b] \subset I$. On peut reformuler cette définition en disant qu'on a défini les intervalles comme les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Toujours au B1, on a fait remarquer que les différents ensembles de la liste

$$[\alpha,\beta],\ [\alpha,\beta[,\ ]\alpha,\beta],\ ]\alpha,\beta[,\ [\alpha,+\infty[\ ]\alpha,+\infty[,\ ]-\infty,\beta],\ ]-\infty,\beta[,]-\infty,+\infty[\quad (*)$$

où $\alpha \leq \beta$ sont deux réels, vérifiaient tous cette propriété unificatrice, et donc étaient des intervalles au sens ci-dessus.

On va montrer ici que réciproquement :

> tout intervalle de $\mathbb{R}$ (i.e. toute partie convexe de $\mathbb{R}$) est bien de l'une des formes de la liste $(*)$ ci-dessus [a]
>
> [a] Noter que l'usage le plus standard est de définir les intervalles comme les ensembles de la liste $(*)$ et le théorème s'énonce alors sous la forme : les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Soit donc I un sous-ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que si I n'est ni majoré, ni minoré, alors $I = \mathbb{R}$.
   N.B. *La preuve commence par « Soit $x \in \mathbb{R}$ » et finit par « donc $x \in I$. »*

b) Montrer que si I est majoré et non minoré alors $I =]-\infty, \beta]$ ou bien $I =]-\infty, \beta[$ en notant $\beta = \sup(I)$.
   N.B. *La distinction de cas est évidente, et la preuve commence par ...*
   Mutatis mutandis on a le cas symétrique où I est minoré, non majoré.

c) Dans le cas où I est borné, commencer par mettre à part le cas trivial où I est un singleton. Ensuite, en appelant $\alpha = \inf I$ et $\beta = \sup I$, on a $\alpha < \beta$ (pourquoi ?), et montrer que $]\alpha, \beta[\subset I \subset [\alpha, \beta]$, ce qui suffit pour conclure.

Remarque : en introduisant la notion de sup. et d'inf. dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut traiter simultanément tous les cas, en disant que si $\alpha = \inf(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta = \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, il suffit de montrer que $]\alpha, \beta[\subset I \subset [\alpha, \beta]$.