

Encore Grassmann...

Beaucoup n'ont pas compris, si E est un e.v. de dim. finie, F et G sont deux s.e.v. de E , comment on peut montrer que $F + G = E$ avec Grassmann. Or, pour montrer que $F + G = E$, il suffit de montrer que $\dim(F + G) = \dim(E)$. Donc par exemple dans la prop. « deux parmi trois » du cours, si on a $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ alors Grassmann donne immédiatement que $\dim(F + G) = \dim(E)$ et donc que $F + G = E$. La réciproque est bien sûr vraie : on peut utiliser $F + G = E$ dans Grassmann, pour en déduire quelque chose sur $F \cap G$...

Deux autres exercices d'application de Grassmann ci-dessous donnés en colle hier !

Exercice 1. Soit E un e.v. de dim. n . Soient F et G deux s.e.v. de E . Montrer que si $\dim(F) + \dim(G) > n$ alors $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 2. Soit E un e.v. de dim. n . Soient H de dim. $n - 1$ et F de dim. qq. deux s.e.v. de E . Que dire de $\dim(F \cap H)$?

Suites récurrentes linéaires d'ordre deux : le retour

Exercice 3. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixés, on note $\mathcal{U}_{a,b} = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$. (Cet ensemble dépend du choix de a et b).

On a vu que c'était un plan vectoriel et dans le cas où l'E.C. $q^2 = aq + b$ admet un $\Delta > 0$, comment obtenir la forme explicite des éléments de $\mathcal{U}_{a,b}$.

- Dans le cas où $\Delta = 0$, et qu'il n'y a qu'une solution q , montrer, si $q \neq 0$ que (q^n) et (nq^n) forment une base de $\mathcal{U}_{a,b}$. (Que dire dans le cas particulier où 0 est solution double ?).
- Dans le cas $\Delta < 0$, on considère plutôt $\mathcal{U}_{a,b,\mathbb{C}} = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$. Montrer que $\mathcal{U}_{a,b,\mathbb{C}}$ est un $\mathbb{C}$ -ev et trouver sa dimension. En déduire ensuite une base de $\mathcal{U}_{a,b,\mathbb{C}}$ formée de deux suites géométriques, puis une base de $\mathcal{U}_{a,b}$ formée de suites explicites.
- En déduire la forme explicite de la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 13u_n$, et de (v_n) définie par $v_0 = 1$, $v_1 = 3$ et $v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$.

Synthèse sur les suites récurrentes linéaires d'ordre deux

Ce qui suit s'applique au cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $V = \{(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n\}$. On cherche une forme explicite pour tous les éléments de V .

a) V est un $\mathbb{K}$ -e.v. (s.e.v. de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$), de dim. deux, car on a un isomorphisme de V dans $\mathbb{K}^2$, $u \mapsto (u_0, u_1)$.

b) On cherche les éléments de V qui sont de la forme (q^n) avec $q \in \mathbb{K}^*$.

Ceci conduit à l'E.C. : $q^2 = aq + b$. On a donc trois cas possibles pour les solutions.

c) Premier cas : l'E.C. admet deux solutions distinctes q_1 et q_2 , alors $\alpha = (q_1^n)$ et $\beta = (q_2^n)$ sont deux suites $\mathbb{K}$ -indépendantes, donc forment une base de V .

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ c'est le cas $\Delta > 0$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, c'est le cas $\Delta \neq 0$.

Alors : $\forall v \in V, \exists ! (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$.

d) Deuxième cas : $\Delta = 0$. On note q la sol. double de l'E.C. On définit $\alpha = (q^n)$ et $\beta = (nq^n)$. On vérifie que $\beta \in V$, et que (α, β) est une base de V .

Alors : $\forall v \in V, \exists ! (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \lambda q^n + \mu n q^n$.

e) Troisième cas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$: l'E.C. n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Dans ce cas, on va distinguer $V_{\mathbb{R}} = \{(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n\}$ et $V_{\mathbb{C}} = \{(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n\}$.

Dans $\mathbb{C}$, on a deux solutions $q_1 = re^{i\theta}$ et $q_2 = re^{-i\theta}$ de l'E.C. dans $\mathbb{C}$ (conjuguées car l'équation est à coeff. réels). Donc le premier cas (c), s'applique à $V_{\mathbb{C}}$ i.e. $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}(q_1^n) \oplus \mathbb{C}(q_2^n)$.

f) Pour trouver une base de $V_{\mathbb{R}}$ formée de suites explicites, il suffit de remarquer que les deux suites $(\operatorname{Re}(q_1^n))$ et $(\operatorname{Im}(q_1^n))$ sont dans $V_{\mathbb{R}}$ et sont indépendantes. Donc dans le cas $\Delta < 0$ tout élément de $V_{\mathbb{R}}$ s'écrit de manière unique $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \lambda r^n \cos(n\theta) + \mu r^n \sin(n\theta)$.