

Exercice 1. Etudier $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x^3/2) - 1}{\tan^3(x/5)}$.

Exercice 2. Donner un équivalent simple de $f(x) = \frac{x^2 + 7x^4 + (e^x - 1)}{x^5 + x^2 + \sin(x)}$ en 0.

Exercice 3 (Équivalents ailleurs qu'en 0, en un $x_0 \in \mathbb{R}$).

Méthode : si $x \rightarrow x_0$ poser systématiquement $x = x_0 + u$ pour se ramener à une variable u tendant vers 0 et utiliser les formules connues.

- a) Donner un équivalent simple de $\ln(x)$ quand $x \rightarrow 1$.
- b) Etudier la limite, quand $x \rightarrow 1$, de $\frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$.
- c) Donner un équivalent simple de $\ln(\cos(x))$ quand $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$.
- d) Etudier $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(3x)}{\cos(x)}$.

Exercice 4. Soit $f(x) = \ln(x^3 - 12x + 16)$. Donner des équivalents simples de f en 0, $+\infty$ et 2.

Exercice 5.

Méthode pour les différences de $\ln$: factoriser dans un des $\ln$ pour faire apparaître deux fois le même $\ln$, qui se simplifie.

- a) A-t-on $\ln(x+1) \sim \ln(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$?
- b) Donner un équivalent simple de $\sqrt{\ln(x+1) - \ln(x)}$ quand $x \rightarrow +\infty$.
- c) Donner un équivalent simple de $x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x)$ en $+\infty$.

Exercice 6. Donner des équivalents simples pour :

- a) $\ln(u)$ quand $u \rightarrow 1$.
- b) $\ln(e^x + e^{-x})$ quand $x \rightarrow +\infty$ et quand $x \rightarrow 0$,
- c) $\ln(1 + e^{-x})$ quand $x \rightarrow +\infty$,

Limites de fonctions puissances : On travaille avec l'écriture $f(x) = u(x)^{v(x)} = \exp(v(x) \ln(u(x))) = \exp(g(x))$. On manipule g avec des équivalents pour trouver sa limite, puis on prend l'exp. de la limite, pas de l'équivalent.

Exercice 7 (A poser en 2021). Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos(x) + \pi \sin(x))^{1/x}$.

Exercice 8. Déterminer $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \tan\left(\frac{3x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos(3x)}}$.

Exercice 9. Méthode pour avoir un équivalent d'une différence d'exponentielles : factoriser l'une des deux, le facteur restant étant de la forme $e^u - 1$.

- a) Donner un équivalent simple de $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}$ quand $x \rightarrow +\infty$.
- b) On fixe $a > 0$. Déterminer la limite, quand $x \rightarrow a$, de $f(x) = \frac{x^x - a^a}{x^a - a^x}$.

Exercice 10. a) Donner un équivalent simple de $\sqrt{1 + \sin(x)} - 1$ quand $x \rightarrow 0$.

- b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{1 + \sin(x)}} - e}{\ln(1 + 34x)}$.

Exercice 11 (Théorème des gendarmes mobiles). Montrer que si $0 < a(x) \leq f(x) \leq b(x)$ pour tout x dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et si $a(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} b(x)$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} a(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} b(x)$.
(On a le même résultat pour les suites).

Exercice 12. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{\sqrt{\sin(x)}}$, b) Déterminer un équivalent simple de $1 - \cos(x)$ quand $x \rightarrow 0$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{\sin(x)}$.

Exercice 13. Déterminer un équivalent en 0 de $1 - \cos^5(x)$.