

Chap. E2 : Opérations, comparaisons et surtout étude pratique, des suites réelles ou complexes

Dans tout de chapitre, on note $\mathbb{K}$ pour désigner ou bien $\mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$. Autrement dit les énoncés faisant intervenir une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ s'appliqueront aussi bien aux suites réelles qu'aux suites complexes.

I Rappels et complément sur la notion de limite pour les suites complexes

1) La définition de la limite :

a) Une définition unifiée : Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{K}$,

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \mathbb{K} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

b) Ce qui change entre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ c'est la forme des voisinages : dans $\mathbb{C}$, $|u_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in D(\ell, \varepsilon)$, où $D(\ell, \varepsilon)$ désigne le disque ouvert de centre ℓ et de rayon ε .

2) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ caractérisation de la convergence avec les parties réelles et imaginaires :

Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n + ib_n$ avec $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \operatorname{Re}(\ell), \\ b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \operatorname{Im}(\ell) \end{cases}$$

3) Les propriétés qui gardent du sens pour les suites complexes :

a) Pas la croissance ou décroissance de (u_n) !

b) En revanche on va voir que toutes les propriétés qui s'expriment avec $|u_n|$ passent des suites réelles aux suites complexes.

Par exemple : par déf. une suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est bornée ssi $(|u_n|)$ est bornée.

II Théorèmes généraux sur les suites réelles et complexes (enfin démontrés) :

1) Théorèmes de comparaison pour les suites réelles :

a) Inégalités sur les limites, si on sait que les limites existent :

Prop. de conservation des inégalités **LARGES** par passage à la limite :

(H.) Soit (u_n) et (v_n) dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$.
On suppose enfin que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l'$.
(C.) $l \leq l'$.

Dém. : Par l'absurde Si $l > l'$. Notons $d = l - l'$.

Fixons $\varepsilon = d/2$. Alors $l' + \varepsilon = l - \varepsilon$ et $]l' - \varepsilon, l' + \varepsilon[\cap]l - \varepsilon, l + \varepsilon[= \emptyset$ (Faire un dessin !)

Comme $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ il existe un n_1 tel que pour tout $n \geq n_1, u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

Comme $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l'$, il existe un n_2 tel que pour tout $n \geq n_2, v_n \in]l' - \varepsilon, l' + \varepsilon[$.

Mais alors pour $n \geq \max(n_0, n_1, n_2)$, on a une contradiction, en effet on a d'une part $u_n \leq v_n$ par (H) et d'autre part $v_n < l' + \varepsilon = l - \varepsilon < u_n$. $\square$

b) Théorème d'existence de limites par comparaison :

(i) Théorème des gendarmes (ou d'encadrement) :

(H.) Soient (a_n) (b_n) et (u_n) dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, a_n \leq u_n \leq b_n$.
On suppose en outre que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ et $b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$, avec la même limite $l \in \mathbb{R}$.
(C.) La suite (u_n) converge vers l .

Dém. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$, il existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1, a_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$,

en part. $a_n > l - \varepsilon$ (1).

Comme $b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$, il existe un $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_2, b_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$, en part.

$b_n < l + \varepsilon$ (2).

On considère alors $N_0 = \max(n_0, n_1, n_2)$. Alors pour tout $n \geq N_0$, par (H.), (1), (2), on a : $l - \varepsilon < a_n \leq u_n \leq b_n < l + \varepsilon$. $\square$

(ii) Version avec un gendarme qui part à l'infini :

(H.) Soient (a_n) et (b_n) dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, a_n \leq b_n$.
On suppose en outre que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
(C.) $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Dém. Soit $A > 0$. On sait qu'il existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1, a_n > A$. Alors par (H.), en posant $N_0 = \max(n_0, n_1)$, pour tout $n \geq N_0$, on a $b_n \geq a_n > A$. $\square$

2) Théorème des gendarmes en valeurs absolue (module) : suite réelles et complexes :

a) Prop. (H) $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (a_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq a_n$ et $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
(C) $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

b) Application des gendarmes : "suite bornée" $\times$ "suite tendant vers zéro"

Si $(u_n), (v_n)$ sont dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, u_n \rightarrow 0$ et (v_n) bornée, alors $u_n v_n \rightarrow 0$.

Dém. On a un $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M$.

Donc $|u_n v_n| \leq M |u_n|$. Or $M |u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (dém. facile avec déf. de la limite, ou thm sur les produits de limites du 3) b) ci-dessous), donc par théorème des gendarmes, comme $0 \leq |u_n v_n| \leq M |u_n|$, on a $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. $\square$

Exple : $\frac{e^{in}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ou encore $\frac{\sin(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

3) Théorèmes généraux d'opérations sur les suites réelles et complexes.

(Savoir refaire toutes ces démonstrations)

a) Addition des limites :

Si $u_n \rightarrow l \in \mathbb{K}$ et $v_n \rightarrow l' \in \mathbb{K}$ alors $u_n + v_n \rightarrow l + l'$

Dém.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$, il existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1, |u_n - l| < \varepsilon/2$.

Comme $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l'$, il existe un $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_2, |v_n - l'| < \varepsilon/2$.

On pose alors $n_0 = \max(n_1, n_2)$, pour tout $n \geq n_0, |(u_n + v_n) - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. $\square$

Rem. : par rapport à la rédaction du B1, on a utilisé les v.abs./modules et l'I.T. plutôt que les encadrements.

b) Multiplication d'une suite par une constante :

Si $u_n \rightarrow l \in \mathbb{K}$ et si $c \in \mathbb{K}$ est fixé alors $cu_n \rightarrow cl$

Dém. On peut supposer $c \neq 0$, car si $c = 0$ le résultat est trivial car (cu_n) est la suite constante égale à 0, donc elle converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, |u_n - l| < \varepsilon' = \varepsilon/|c|$

Alors pour tout $n \geq n_0, |cu_n - cl| = |c||u_n - l| < |c|\varepsilon' = \varepsilon$. $\square$

c) Multiplication des limites :

Si $u_n \rightarrow l \in \mathbb{K}$ et $v_n \rightarrow l' \in \mathbb{K}$ alors $u_n.v_n \rightarrow l.l'$

Dém. non faite au B1, une idée en plus :

L'idée en plus : $|u_n v_n - ll'| = |u_n v_n - l v_n + l v_n - ll'| = |v_n(u_n - l) + l(v_n - l')| \leq |v_n||u_n - l| + |l||v_n - l'|$

L'intérêt de l'inégalité du cartouche est de faire apparaître les différences $|u_n - l|$ et $|v_n - l'|$ qui tendent vers zéro.

Reste un pb. $|u_n - l|$ est multiplié par $|v_n|$, mais là on se souvient qu'une suite convergente est toujours bornée.

Dém. Comme (v_n) converge, il existe un $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq M$.

Alors l'inégalité du cartouche devient :

$$|u_n v_n - ll'| \leq M|u_n - l| + |l||v_n - l'|.$$

Or par les résultats du a) et du b), $M|u_n - l| + |l||v_n - l'| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et donc par théorème des gendarmes on conclut que $|u_n v_n - ll'| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. $\square$

d) Limite de l'inverse :

Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{K}^*$ alors il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \neq 0$ et donc la suite $(1/u_n)$ est bien définie A.P.C.R et $1/u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1/l$.

Dém. (i) Supposons p.ex. $l > 0$. On a démontré (conséq. de la déf. de la limite) qu'alors si on choisit un $\lambda \in]0, l[$, on sait qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq \lambda > 0$. (Adapter si $l < 0$).

(ii) En outre alors, pour tout $n \geq n_0$: $\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|l - u_n|}{|u_n l|} \leq \frac{|u_n - l|}{\lambda l}$

Comme $|u_n - l| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on conclut par le b) et gendarmes que $\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. $\square$

4) Théorème de composition des limites (suites et fonctions)

Ici on se restreint aux réels mais l'analogue en variable complexe est vrai aussi.

Thm. Si $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{x} \in \mathbb{R}$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} l \in \mathbb{R}$, alors $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.

Dém. On traite le cas où $\bar{x} \in \mathbb{R}$, et $l \in \mathbb{R}$, adapter aux autres cas.

On veut montrer que $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$. Soit $\varepsilon > 0$

Comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} l$ par déf. de la limite (cf. B1), il existe un $\alpha > 0$ que pour tout $x \in]\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha[$,

on a $f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ (*)

Mais comme $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{x}$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in]\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha[$.

Mais alors, par (*), pour tout $n \geq n_0$, $f(x_n) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$. $\square$

III Relations de comparaisons, croissances comparées :

Reprise de notions du B2 IV, mais du nouveau !

1) La relation de négligeabilité : Déjà vue, mais reprise de manière plus générale

(a) Déf. plus générale qu'au B2 :

Soient (u_n) et (v_n) dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) et on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ (lire "petit ô") ou $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\ll} v_n$ si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

(b) Rem. Dans le cas part. où (v_n) ne s'annule pas, au moins A.P.C.R., qui était le seul cas considéré au B2, la déf. du (i) équivaut, par déf. de la limite, à la déf. du B2 :

$$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

(c) **Exemples :** $u_n = o(1) \Leftrightarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si $u_n = 3n^2 + 7n + 1$, alors $u_n = o(n^3)$ p.ex.

(d) Pourquoi la notation $u_n = o(v_n)$ est-elle *abusive* ?

C'est l'égalité qui est gênante ! En effet dans le second exemple du (iii), on a $u_n = o(n^3)$ et aussi $u_n = o(n^4)$. Mais un $o(n^4)$ n'est pas, en sens inverse, un $o(n^3)$.

En toute rigueur, il s'agit d'une relation d'appartenance et pas d'égalité : on devrait écrire $u_n \in o(n^3)$ pour dire que (u_n) appartient à l'ensemble des suites négligeables devant la suite (n^3) . Néanmoins l'usage dans la pratique est d'écrire ces égalités... à manier avec précautions !

2) La relation de domination : nouveau en maths, déjà utilisée dans le cours d'info.

(a) **Déf.** Soient (u_n) et (v_n) dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est *dominée* par (v_n) et on note (abusivement) $u_n = O(v_n)$ (lire "grand ô") si, et seulement si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists M > 0, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq M|v_n|$$

(b) **Rem.** Dans le cas particulier où v_n ne s'annule pas, $u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n}$ bornée.

(c) **En part.** $u_n = O(1)$ signifie : (u_n) est bornée.

(d) **Autre exemple :** Si $u_n = 7n^2 + 2n + 1$, alors $u_n = O(n^2)$. Mais aussi $u_n = O(n^3)$.

On peut faire la même remarque qu'au a) (iv) sur le caractère *abusif* de la notation "égal".

3) Propriétés des relations o et O

(a) Les relations o et O sont *transitives*. Exercice !

(b) Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$. Exercice !

(c) Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = O(u_n)$ alors $w_n = o(v_n)$.

Dém. 1 dans le cas part. où (u_n) et v_n ne s'annulent pas : pour voir que c'est facile !

On veut montrer que $\frac{w_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Or $\frac{w_n}{v_n} = \frac{w_n}{u_n} \cdot \frac{u_n}{v_n}$.

Or $(\frac{w_n}{u_n})$ est bornée et $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on conclut "suite bornée" $\times$ "suite tendant vers zéro". $\square$

Dém. 2. dans le cas général, bon entraînement au maniement des déf. générales :

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $w_n = O(u_n)$ on a un $M > 0$ et un $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $|w_n| \leq M|u_n|$.

Comme $u_n = o(v_n)$, on a un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \varepsilon'|v_n|$ où $\varepsilon' =$

Alors pour $N_0 = \max(n_0, n_1)$ et tout $n \geq N_0$, on a $|w_n| \leq M\varepsilon'|v_n|$.

Donc $\forall n \geq N_0, |w_n| \leq \varepsilon|v_n|$. $\square$

4) Test de d'Alembert

(a) **Version faible :**

(H.) Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, une suite qui ne s'annule pas A.P.C.R. On peut donc définir la suite (u_{n+1}/u_n) au moins A.P.C.R.

On suppose que $|u_{n+1}/u_n| \rightarrow l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

(C1) Si $l < 1$ alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(C2) Si $l > 1$ alors $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

(C3) Si $l = 1$, on ne peut rien dire !

Dém. de (C1). On suppose donc $l < 1$. On veut montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui est équivalent à $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Pour ne pas s'encombrer des valeurs absolues, on note $v_n = |u_n|$.

L'hyp. est que $v_{n+1}/v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l < 1$. La conclusion est que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Or, comme $l < 1$, en prenant $\varepsilon = (1 - l)/2$, on a $l + \varepsilon < 1$.

Comme $v_{n+1}/v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$, on sait qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a : $v_{n+1}/v_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

En particulier, en posant $\lambda = l + \varepsilon$, on a : $\forall n \geq n_0, v_{n+1}/v_n \leq \lambda$ i.e. $v_{n+1} \leq \lambda v_n$.

Ainsi, $v_{n_0+1} \leq \lambda v_{n_0}$, et $v_{n_0+2} \leq \lambda v_{n_0+1} \leq \lambda^2 v_{n_0}$.

Par réc. immédiate, on en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}, v_{n_0+k} \leq \lambda^k v_{n_0}$.

Ou encore, $\forall n \geq n_0, 0 \leq v_n \leq \lambda^{n-n_0} v_{n_0} = \lambda^n \frac{v_{n_0}}{\lambda^{n_0}}$.

Or $\lambda^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ car $\lambda < 1$, donc $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ par théorème des gendarmes. $\square$

(iii) *Dém. de (C2)*. On suppose $l > 1$, et on note (v_n) comme au (ii).

Cette fois l'hyp. est que $v_{n+1}/v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l > 1$. La conclusion est que $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Or, comme $l > 1$, en prenant $\varepsilon = (l - 1)/2$, on a $l - \varepsilon > 1$.

Comme $v_{n+1}/v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$, on sait qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a : $v_{n+1}/v_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

En particulier, en posant $\lambda = l - \varepsilon$, on a : $\forall n \geq n_0, v_{n+1}/v_n \geq \lambda$ i.e. $v_{n+1} \geq \lambda v_n$.

Par réc. immédiate, on en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}, v_{n_0+k} \geq \lambda^k v_{n_0}$.

Ou encore, $\forall n \geq n_0, v_n \geq \lambda^{n-n_0} v_{n_0} = \lambda^n \frac{v_{n_0}}{\lambda^{n_0}}$.

Or $\lambda^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ car $\lambda > 1$, donc $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$. $\square$

Remarque : On peut aussi déduire la (C2) de la (C1) appliquée à $1/u_n$.

(iv) *Illustration que dans le cas (C3) on ne peut rien dire :*

Si $u_n = n$, on a $l = 1$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, si $u_n = 1/n$, on a aussi $l = 1$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \in \mathbb{R}^*$ qcq. alors $u_{n+1}/u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ aussi !

b) *La leçon des preuves de (C1) et (C2) :* On a en fait prouvé le résultat plus fort suivant :

(H.) Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, une suite qui ne s'annule pas A.P.C.R. On peut donc définir la suite (u_{n+1}/u_n) au moins A.P.C.R.

On suppose que $|u_{n+1}/u_n| \rightarrow l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

(C1) Si $l < 1$ alors pour tout $\lambda \in]l, 1[$, $u_n = O(\lambda^n)$

(C2) Si $l > 1$ alors pour tout $\lambda \in]1, l[$, $\lambda^n = O(u_n)$.

Scholie : La **(C1)** dit que (u_n) tend vers zéro au moins aussi vite que les suites géométriques (λ^n) citées. La **(C2)** dit que $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$ au moins aussi vite que les suites géométriques (λ^n) citées.

5) Application de d'Alembert à l'échelle de comparaison des suites :

(i) Prop. pour tout $\alpha > 0$ et $a > 1$: $n^\alpha \ll_{+\infty} a^n \ll_{+\infty} n! \ll_{+\infty} n^n$

(ii) Rem. A part les résultats pour $n!$, les autres résultats sont des cas particuliers de résultats déjà obtenus pour les fonctions au **B2**, **IV** conséq. des prop. de la fonction exp. Ici, on va donc prouver les deux résultats pour $n!$. On laisse en exercice la preuve de $n^\alpha \ll_{+\infty} a^n$ à l'aide de d'Alembert, qui est donc une autre preuve par rapport à celle du B2.

(iii) Preuve de $a^n \ll_{+\infty} n!$: On veut montrer que $u_n = \frac{a^n}{n!} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Or $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{n!(n+1)} \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et donc d'Alembert (C1 avec $l = 0$), s'applique pour donner que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. $\square$

(iv) Preuve de $n! \ll_{+\infty} n^n$: On veut montrer que $u_n = \frac{n!}{n^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Or $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!(n+1)}{(n+1)^n(n+1)} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad (*)$.

Or en inversant num. et dénom. : $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp(n \ln(1 + \frac{1}{n}))$.

Via $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, on a $n \ln(1 + \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Donc $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \exp(n \ln(1 + \frac{1}{n})) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$.

Donc avec (*) : $u_{n+1}/u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1/e < 1$ et la conclusion par d'Alembert. $\square$

(v) **Remarque :** Une preuve plus rapide que celle du (iv), sans d'Alembert, est la suivante : $\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times n}{n \times n \times \dots \times n} = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \dots \times \frac{n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ car chaque facteur de la parenthèse est plus petit ou égal à 1. Cela suffit pour conclure que $\frac{n!}{n^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. (D'Alembert donne $n! = O(\lambda^n n^n)$ pour tout $\lambda > 1/e$).

IV Essai de classification des suites qu'on peut rencontrer dans les exercices :

1) Suites définies *explicitement* par une fonction usuelle $u_n = f(n)$.

Exemple déjà vus : en général la limite de la fonction donne la limite de la suite.

Mais il y a des cas plus subtils où le n entier donne des résultats particuliers.

2) Suites définies par une relation de récurrence à partir d'une fonction usuelle

$u_{n+1} = f(u_n)$

Exemple : $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. (On donnera des méthodes systématiques au § V.)

3) Suites définies *implicitement* à partir des zéros de fonctions. (nouveau)

Exemple d'exercice : on donne $f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^n x^k\right) - 1$.

(i) Mq f_n admet une unique racine $x_n \in \mathbb{R}^+$.

(ii) Monotonie et convergence de la suite (x_n) .

(iii) Expliciter la limite en transformant l'écriture de f_n .

On détecte toutes les propriétés de x_n en lui appliquant des fonctions $f_m \dots$

4) Suites définies par une somme, un produit :

On essaie de majorer/minorer : ce qui est général en analyse ! Ici :

Penser qu'une somme de n termes est minorée par n fois le min des termes (resp. majorée par n fois le max)

5) Des sommes particulières : les séries, étudiées au chap. E3

V Méthodes pour les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

1) Recherche d'un intervalle stable, rôle des points fixes

Reprise de l'exemple de $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$ qcq.

a) L'ensemble D_f est-il stable par f ? Autres ensembles stables intéressants ?

(i) Déf. I est stable par f si, et seulement si, $f(I) \subset I$.

(ii) Intérêt : dans ce cas, si $u_0 \in I$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in I$.

Remarque : si D_f est stable par f , on est donc sûr pour tout $u_0 \in D_f$, la suite (u_n) est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sur l'exemple de $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, $D_f = [-2, +\infty[$ est bien sûr stable par f et $f(D_f) = \mathbb{R}^+$ est un ensemble stable plus petit : pour tout $u_0 \in D_f$, à partir de u_1 tous les termes de la suite sont dans $\mathbb{R}^+$.

Exemple à contrario : existe-t-il des valeurs de u_0 à partir desquelles on peut définir $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

(iii) Remarque : dans la suite, même si D_f est stable, on va voir qu'on cherche souvent des sous-ensembles stables plus petits que D_f où l'on peut mieux comprendre l'évolution de la suite (u_n) .

Déjà, un résultat évident, si D_f est stable par f alors on $f(D_f)$ lui-même qui est stable car $f(D_f) \subset D_f \Rightarrow f(f(D_f)) \subset f(D_f)$.

(iv) Plus généralement, si on note $I = D_f$, tous les ensembles itérés $f(I)$, $f^{\circ 2}(I)$, $f^{\circ n}(I)$ sont stables par f , on a la suite d'inclusion :

$$I \supset f(I) \supset f^{\circ 2}(I) \supset \dots \supset f^{\circ n}(I) \supset \dots$$

qui fabrique une suite d'ensembles de plus en plus petits (au sens large, il peut y avoir stabilisation) où l'on va voir évoluer les termes de la suite puisque $u_n \in f^{\circ n}(I)$.

(iv) Sur l'exemple de $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$, $D_f = [-2, +\infty[$, $f(D_f) = [0, +\infty[$, $f^{\circ 2}(D_f) = [\sqrt{2}, +\infty[$, voir sur un dessin déjà que tous les intervalles successifs contiendront le point fixe 2.

b) Etude de la fonction φ donnant les points fixes (et plus) :

(i) L'étude des zéros de $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ donne les points fixes de f .

(ii) Intervalles stables *plus intéressants* sur l'exemple : $[-2, 2]$ et $[2, +\infty[$, délimités par le point fixe, car f croissante ici.

(iii) Si u_0 est dans un intervalle stable où $\varphi > 0$ (resp. $\varphi < 0$) alors (u_n) stmt. croissante (resp. stmt décroissante). (Appl. à l'exemple).

(iv) Les points fixes sont les seuls candidats limites :

Prop. : Si I intervalle *fermé, stable* par la fonction *continue* f , et si (u_n) converge vers l , alors $l \in I$ et $f(l) = l$.

Ceci achève l'étude de notre exemple pour tout $u_0 \in [-2, +\infty[$.

c) Remarque : dans l'exemple étudié la fonction f était croissante sur D_f . En pratique, si on a une fonction qui change de monotonie, on cherchera (si possible) des intervalles stables où f est monotone pour des raisons qu'on va expliquer ci-dessous.

2) Cas où f est croissante sur l'intervalle stable

a) Prop. Si f *croissante* sur I intervalle stable et $u_0 \in I$ alors (u_n) est *monotone*. Sens monotonie donné par $u_1 - u_0 = \varphi(u_0)$.

b) C'était le cas dans l'exemple du 1).

c) Etude de (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{++}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$ (algorithme de Babylone pour $\sqrt{a}$)

3) Cas, plus défavorable, où f est décroissante sur l'intervalle stable

a) Prop. Si f *décroissante* sur I intervalle stable et $u_0 \in I$ alors $f \circ f$ est croissante et par b), (u_{2n}) et (u_{2n+1}) monotones, de monotonie opposée.

b) Ex. $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = (u_n - 1)^2$.

c) En pratique cette étude de $f \circ f$ peut être difficile, on peut parfois l'éviter avec le 4).

4) Cas où f est contractante

a) Déf. f est une fonction k -lipschitzienne sur I ssi $\forall (x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Si $k < 1$ on dit que f est *contractante*.

b) Par T.A.F. si $|f'| \leq k$ sur I alors f est k -lip. sur I .

c) Rem. (à refaire à chaque fois) : si f est k -lip. sur intervalle I stable, si $u_0 \in I$, et si l est un point fixe de f sur I , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$.

Donc si $k < 1$, (u_n) converge vers l .

N.B. — Pour $k < 1$ ce point fixe est forcément unique.

d) Un exemple complet traité à titre d'exemple : $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$. Mise en évidence de l'attraction par le point fixe sur tout un intervalle.

Ce qui suit n'est pas au programme de la semaine

5) Version locale du résultat du 4) : notion de point fixe attractif ou répulsif

N.B. Les notions qui suivent ne sont pas à considérer comme du cours : on doit rejuster à chaque fois le raisonnement.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$ un point fixe de f .

a) Point fixe attractif

Déf. Un point fixe a de f sera dit attractif ssi $|f'(a)| < 1$.

Prop. (dém. (*)) Pour une suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, il existe un voisinage V de a tel que si $u_0 \in V$ alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Dém. avec la déf. de la limite appliquée aux taux de variation, sera mieux digérée après le chap. F, pour les plus à l'aise ici.

Rem. Si f est de classe C^1 sur un voisinage de l c'est plus facile, car par continuité de f' , f est contractante sur un voisinage de l .

b) Point fixe répulsif : si $|f'(a)| > 1$.

Prop. (dém. à faire en exercice) Si a est un point fixe répulsif de f , alors la seule possibilité pour que la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a est que la suite soit constante égale à a à partir d'un certain rang.

6) Suites récurrentes particulières

- a) Suites réc. affines d'ordre 1, encore appelées arithmético-géométriques.
- b) Suites réc. lin. d'ordre 2 (on sort du cadre $u_{n+1} = f(u_n)$ pour passer à celui de $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$) : revoir les exercices chap. algèbre linéaire.
- c) Exemple de suite réc. affine d'ordre 2. On cherche en plus une "solution particulière".
Exemple d'exercice :
Trouver une forme explicite pour les suites (u_n) définies par : (i) $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 13u_n + 2$,
(ii) $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1$.