Chap. E1 : fondement de l'analyse : $\mathbb{R}$ et les suites réelles

Si les points d'une droite sont répartis en deux classes, de telle manière que tous les points de la première classe soient placés à gauche de tous les points de la seconde, alors il existe un unique point de division, qui engendre cette répartition en deux classes, cette coupure de la droite en deux parties.

R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1872.*

Revoir le B1, § I, sem. 4, et Ex. pl. 7.

I Propriétés des relations d'ordres

1) Propriétés de l'ordre dans $\mathbb{N}$

Ces propriétés ont été données au chap. A2. Elles se démontrent à partir de la déf. axiomatique de $\mathbb{N}$ i.e. par récurrence.

$\mathbf{P}_1$ Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément (ou minimum).

Rappel : Si $A \subset \mathbb{N}$, on dit qu'un entier $M \in \mathbb{N}$ est un *majorant* de A ssi $\forall\, a \in A$, $a \leqslant M$. On dit qu'une partie A de $\mathbb{N}$ est *majorée* ssi elle admet un majorant.

$\mathbf{P}_2$ Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément (ou maximum).

2) Passage de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$ puis à $\mathbb{Q}$:

a) **Dans $\mathbb{Z}$: $\mathbf{P_1}$** n'est plus vraie, $\mathbb{Z}$ n'admet pas de plus petit élément, mais :

$\mathbf{P}_{1,b}$ Toute partie non vide *minorée* de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément (ou minimum).

b) **Dans $\mathbb{Q}$** : $\mathbf{P}_{1,b}$ et $\mathbf{P}_2$ sont définitivement perdues :

P.ex. pour $\mathbf{P}_2$: soit $A = \mathbb{Q}^{-*}$ alors A est majoré par 0, mais A n'a pas de plus grand élément.

Savoir prouver – Par l'absurde si on avait un $a \in A$ tel que $a = \max(A)$ comme $a < 0$ alors $a/2$ est aussi dans A et $a < a/2$, *contradiction.*

3) Notions générales sur les relations d'ordre

On se place, provisoirement, dans un cadre abstrait où E est un ensemble quelconque et ρ est une relation sur E : pour deux éléments x et y de E, on notera $x\rho y$ pour dire que x est en relation avec y.

Mathématiquement, une relation sur E est une correspondance entre éléments de E, ce qui se définit rigoureusement (chap. A) en se donnant un sous-ensemble $\Gamma \subset E \times E$, et en posant que $x\rho y \Leftrightarrow (x,y) \in \Gamma$.

a) Relations d'ordre :

(i) Rappel : une relation ρ sur E est :

- *réflexive* ssi
- *symétrique* ssi
- *Transitive* ssi

On a vu que les relations R.S.T. s'appelaient des *relations d'équivalences.*

(ii) Déf. nouvelle : une relation ρ sur un ensemble E est dite *antisymétrique* si, et seulement

$$\forall\,(x,y) \in E^2, \quad \left.\begin{array}{c} x\rho y \\ y\rho x \end{array}\right\} \Rightarrow x = y.$$

(iii) **Déf.** Une relation sur un ensemble E qui est *réflexive, Antisymétrique, et transitive* (R.A.T) s'appelle une *relation d'ordre* sur E.

b) Exemple de relation d'ordre :

(i) Les ordres usuels $\leqslant$ et $\geqslant$ dans les ensembles de nombres $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

(ii) Attention la relation $>$ ou $<$ n'est pas un *ordre* au sens du a) car elle n'est pas

(iii) L'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{R}^2$, défini par :

$$(x,y) \leq_{lex} (x',y') \Leftrightarrow \{$$

(iv) Si E est un ensemble quelconque, on a un ordre dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$:
(v) En arithmétique : la relation "divise" dans $\mathbb{N}$ définie par : $a|b \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$ tel que $b = ka$.
Question : la relation "divise" dans $\mathbb{Z}^*$ est-elle un ordre ?

c) Différence *ordre total, ordre partiel***.**

(i) **Définition :** Soit E un ensemble qcq. et $\geqslant$ une relation d'ordre qcq. sur E (qu'on choisit de noter ainsi). On dit que $\geqslant$ est un *ordre total* ssi deux éléments quelconques de E sont toujours comparables pour $\geqslant$ ce qui signifie mathématiquement : $\forall\,(x,y) \in E^2$, $x \geqslant y$ ou $y \geqslant x$.

Dans le cas contraire, autrement dit s'il existe au moins un couple $(x,y) \in E^2$ tel qu'on n'ait ni $x \geqslant y$, ni $y \geqslant x$, on dit que $\geqslant$ est un *ordre partiel*.

(ii) **Exemples :**
— L'ordre $\leq$ usuel dans $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ est un ordre total.
— L'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$ est un ordre

— L'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$ est un ordre

— La relation $|$ dans $\mathbb{N}$ est un ordre

d) Compatibilité d'une relation avec une loi de composition interne :

(i) Définition générale pour toute relation ρ sur un ensemble E muni d'une l.c.i. $*$:

Déf. On dit que ρ est *compatible* avec $*$ ssi $\forall\,(a,b,c,d) \in E^4$, $\left.\begin{matrix} a\rho b \\ c\rho d \end{matrix}\right\} \Rightarrow (a*c)\rho(b*d)$.

On avait vu cette définition au Chap. **C1** pour la relation de *congruence modulo n*.
Elle s'applique aussi p.ex. aux relations d'ordre.
Ainsi dans $(\mathbb{R},+,\times)$, on a l'habitude des propriétés suivante :

$\forall\,(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $\left.\begin{matrix} a \geqslant b \\ c \geqslant d \end{matrix}\right\} \Rightarrow (a+c) \geqslant (b+d)$.

$\forall\,(a,b,c,d) \in (\mathbb{R}^+)^4$, $\left.\begin{matrix} a \geqslant b \\ c \geqslant d \end{matrix}\right\} \Rightarrow (a.c) \geqslant (b.d)$.

(ii) **Définition (mot H.P)** . Un corps K muni d'un ordre total $\geqslant$ compatible avec $+$ et compatible avec $\times$ sur K^+ s'appelle *corps totalement ordonné*.

(iii) Exemples : $(\mathbb{Q},+,\times)$ et $(\mathbb{R},+,\times)$ sont des corps totalement ordonnés, en considérant l'ordre usuel $\geq$.

Contre-exemple : Si on considère $\geq$ l'ordre lexicographique sur $\mathbb{C}$, alors $\geq$ est un ordre total sur $\mathbb{C}$, compatible avec $+$, mais $\geq$ n'est pas compatible avec $\times$ sur $\mathbb{C}^+$. Mieux (ou pire si on veut), il n'existe pas d'ordre dans $\mathbb{C}$ compatible avec $+$ sur $\mathbb{C}$ et $\times$ sur $\mathbb{C}^+$.. Cf. ex. pl.

4) Majorant, Max, Sup., Minorant, Min., Inf (*important 6 notions distinctes !*) **:**

Parmi les six définitions suivantes 4 sont déjà connues, on les redonne pour un ordre quelconque, 2 sont nouvelles, et centrales pour toute la suite du cours d'analyse.

Dans ce qui suit E est un ensemble quelconque muni d'une relation d'ordre $\geqslant$ quelconque.
On note alors $a \leqslant b \Leftrightarrow b \geqslant a$.

a) **Majorant, minorant** – Soit $\mathcal{A}$ une partie de E.

Déf. 1 Soit $M \in E$. On dit que M est un *majorant* de $\mathcal{A}$ ssi

On dit que $\mathcal{A}$ est *majorée* ssi

Déf. 2 Soit $m \in E$. On dit que m est un *minorant* de $\mathcal{A}$ ssi

On dit que $\mathcal{A}$ est *minorée* ssi

Savoir faire : Soit $\mathcal{A}$ une partie de E.

$\mathcal{A}$ n'est pas majorée si, et seulement si,

b) **Maximum, minimum -** Soit $\mathcal{A}$ une partie de E.

Déf. 3 a_1 est *maximum* ou *plus grand élément* de $\mathcal{A}$ ssi $[a_1 \in \mathcal{A}$ et $\forall\, a \in \mathcal{A}, a \leqslant a_1]$.

Déf. 4 $\mathcal{A}$ admet un *maximum* ssi $\exists\, a_1 \in \mathcal{A}$, $\forall\, a \in \mathcal{A}, a \leqslant a_1$.

Prop. Si $\mathcal{A}$ admet un maximum (resp. un minimum) alors celui-ci est *unique*. On note alors $\max(\mathcal{A})$ (resp. $\min(\mathcal{A})$) cet unique maximum (resp. minimum).

Remarque : Dans $E = \mathbb{N}$ muni de l'ordre | (divise), l'ensemble $\mathcal{A} = \{2, 3\}$ admet-il un maximum ? Décrire les majorants de E ?

c) Borne supérieure (Sup.) et borne inférieure (Inf.) : nouveauté

(i) Exemple important (utilisant notre *habitude* des nombres réels) :

si, dans $\mathbb{R}$, on considère $\mathcal{A} = [0, 1[$ alors $\mathcal{A}$ n'a pas de max. mais 1 joue un rôle spécial : c'est le plus petit des majorants de $\mathcal{A}$. On va dire $1 = \sup(\mathcal{A})$

(ii) **Déf. 5** On dit que $\mathcal{A} \subset E$ admet une *borne supérieure* si, et seulement si, $\mathcal{A}$ est majorée *et* l'ensemble de tous les majorants de $\mathcal{A}$ admet un *plus petit élément.*

On note alors $\sup(\mathcal{A})$, le *plus petit des majorants de* $\mathcal{A}$.

(iii) **Déf. 6** On dit que $\mathcal{A} \subset E$ admet une *borne inférieure* si, et seulement si, $\mathcal{A}$ est minorée *et* l'ensemble de tous les minorants de $\mathcal{A}$ admet un *plus grand élément.*

On note alors $\inf(\mathcal{A})$, le *plus grand des minorants de* $\mathcal{A}$.

(iv) **Lien entre max. et sup.**

Prop. *Si $\mathcal{A}$ admet un maximum alors* $\sup(\mathcal{A}) = \max(\mathcal{A})$.

On a vu au (i) avec $\mathcal{A} = [0, 1[$ qu'on peut avoir un sup. sans avoir de max.

Terminologie : Quand $\sup(\mathcal{A}) = \max(\mathcal{A})$ on dit que "*le sup. est atteint*".

Preuve de la prop. : On veut montrer que si $\mathcal{A}$ admet un max c'est bien le plus petit des majorants de $\mathcal{A}$. Notons $M = \max(\mathcal{A})$. *Par l'absurde*, s'il existe un $N \in E$, majorant de $\mathcal{A}$, tel que $N < M$. Comme N est plus grand que tous les éléments de $\mathcal{A}$, en part. $N \geqslant M$ car $M \in \mathcal{A}$. On a donc $N < M$ et $N \geqslant M$ *contradiction.* □

(De même pour min et inf).

d) Caractérisations pratiques de la borne supérieure :

(i) **Prop.** Soit $(E, \leq)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre *total.* Soit $\mathcal{A} \subset E$.

$$M = \sup(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, a \in \mathcal{A},\, a \leqslant M, & (1) \\ \forall y < M, \exists x \in \mathcal{A}, y < x \leqslant M. & (2) \end{cases}$$

Preuve – La condition (1) signifie que M est un majorant.

La condition (2) signifie bien que M est le *plus petit* en disant que tout nombre y strictement plus petit que M n'est pas un majorant de $\mathcal{A}$. □

(ii) Dans le cas, qui va nous occuper dans toute la suite, des ensembles de nombres ($\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$) un élément $y < M$ peut s'écrire $y = M - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, et la caract. du (i) devient :

Prop. (w-def. du sup.) Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble d'un corps totalement ordonné K (pour nous K sera $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$). Alors :

$$M = \sup(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, a \in \mathcal{A},\, a \leqslant M, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathcal{A}, M - \varepsilon < x \leqslant M \end{cases}$$

Illustration sur la droite réelle :

II Les nombres réels : de l'axiomatique au concret

Règle du jeu de ce § II, on oublie (provisoirement) tout ce qu'on "sait" sur $\mathbb{R}$

1) Les entiers et les nombres qui s'en déduisent facilement : les rationnels

a) On a parlé de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers au chap. A2. Même si l'ensemble des entiers est infini, se donner un nombre entier repose sur un processus *fini.*

Il en est de même de la donnée d'une fraction a/b d'entiers, i.e d'un élément de $\mathbb{Q}$: il suffit de se donner les deux entiers a et b !

Même s'ils ont une *écriture décimale infinie*, comme par exemple $1/7 = 0,142857142857...$, l'infini qui apparaît dans le membre de droite est bien contrôlé par un nombre *fini d'informations* : le membre de gauche le dit bien (!), et en fait le membre de droite peut s'écrire comme la reproduction d'une *période.*

Fait culturel : L'écriture décimale d'un nombre rationnel est *toujours* périodique à partir d'un certain rang.

b) **Motivation** – Les nombres *irrationnels* ont posé beaucoup de problèmes aux mathématiciens, depuis les Pythagoriciens jusqu'à la fin du XIXème siècle où on a enfin pu les *construire* rigoureusement. Le problème est que la notion *d'infini* apparaît dans la déf. même de *chaque nombre.*

En fait, il faudrait distinguer entre les nombres *algébriques* comme $\sqrt{2}$ qu'on peut encore "définir" de manière finie (et d'autres encore), et π qui lui échappe à ce type de définition.

Encore une fois (penser à notre déf. de vecteur comme "élément d'un e.v."), on ne va pas définir ce qu'est *un* nombre réel, tout seul dans son coin, mais ce qu'est *l'ensemble des nombres réels* qui veut traduire mathématiquement l'idée de l'ensemble "continu" des points d'une droite.

c) Un outil pour la suite : la notion de limite de suite dans $\mathbb{Q}$ (idem déf. du B1)

Même si $\mathbb{Q}$ n'est pas « continu » on peut sans pb. y définir des limites :

Soit $(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{Q}$. Par déf. : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^{+*}, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geqslant n_0, |u_n - l| < \varepsilon.$

d) Une insuffisance de $(\mathbb{Q}, \geqslant)$ pour les bornes supérieures

Fait : Dans $\mathbb{Q}$, il existe (beaucoup de) parties majorées qui n'ont pas de borne supérieure.

Exemple : *Attention on ne veut pas parler de nombre réel à ce stade, cf. règle du jeu, on ne sort pas de* $\mathbb{Q}$..

On considère $\mathcal{A} = \{r \in \mathbb{Q},\, r^2 < 2\,\}$.

Alors $\mathcal{A}$ est majoré par 2 par exemple. En effet si $r > 2$ alors $r^2 > 4$ et donc $r \notin \mathcal{A}$. Donc par contraposée si $r \in \mathcal{A}$ alors $r \leqslant 2$.

On va démontrer que $\mathcal{A}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Par l'absurde, supposons que $\mathcal{A}$ a une borne supérieure $M \in \mathbb{Q}$. On distingue deux cas :

• 1er cas : $M^2 < 2$ autrement dit $M \in \mathcal{A}$ est donc le *maximum* de $\mathcal{A}$.

On considère alors la suite $(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (M + 1/n)^2$.

Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M^2$. Comme $M^2 < 2$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in [M^2, 2[$. Mais alors $M + 1/n \in \mathcal{A}$, *contradiction avec le fait que M soit le maximum de $\mathcal{A}$.*

• 2ème cas : $M^2 > 2$. *On va construire cette fois un autre majorant de A strictement plus petit que M.*

On considère la suite (v_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (M - 1/n)^2$.

De même $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M^2$ et il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geqslant n_0$, $v_n \in]2, M^2]$.

Mais alors pour $n \geqslant n_0$, $M - 1/n$ est un majorant de $\mathcal{A}$ (car si on avait un $r \in \mathcal{A}$ tel que $r > M - 1/n$, on aurait $r^2 > (M - 1/n)^2 \geqslant 2$ impossible pour $r \in \mathcal{A}$).

Donc $M - 1/n$ est un majorant de $\mathcal{A}$ strictement plus petit que M, *contradiction avec la déf. de la borne sup.* □

2) Théorème-définition de $(\mathbb{R},+,\times)$

a) Thm. déf **(H.P.)** Il existe un corps totalement ordonné *essentiellement unique* contenant $\mathbb{Q}$ et ayant la propriété suivante (P.B.S.) toute partie non vide majorée admet une borne supérieure.
Par déf. ce corps totalement ordonné est noté $(\mathbb{R},+,\times,\leqslant)$.

b) *Explication du "essentiellement unique" :* Si on considère deux corps K_1 et K_2 vérifiant ces propriétés, il existe un isomorphisme entre les deux, compatible avec l'ordre i.e. croissant.

Remarque 1 Il est équivalent, dans le théorème précédent, de remplacer la P.B.S. par la P.B.I. : toute partie non vide minorée admet une borne inférieure.

Remarque 2 : le « contenant $\mathbb{Q}$ »dans le théorème du 2) a) peut être enlevé car il n'est pas difficile de démontrer que tout corps totalement ordonné contient $\mathbb{Q}$ (i.e. un sous-corps isomorphe à $(\mathbb{Q},+,\times)$).

3) $(*)$ Commentaires H.P. sur la partie *existence* dans le théorème fondamental du 2) :

La partie *existence* du théorème précédent demande une *construction.* Cette *construction de* $\mathbb{R}$ est H.P. mais on en a donné des bribes d'un début au début du B1, à partir des développements décimaux *propres.* Dans cette construction (qui n'est pas la seule, cf. fin du chapitre), un réel est un développement décimal illimité propre.

• Avec les dév. décimaux illimités propres, il est facile de définir l'ordre et de voir qu'on a un ensemble totalement ordonné : on sait comparer deux dév. décimaux propres.

• Pour un réel positif $x = a_0, a_1 \dots a_n ...$, on note $x_k = a_0, a_1 \dots a_k$ le nombre décimal obtenu en ne gardant que les k premiers chiffres après la virgule. Dire qu'un réel positif $x = a_0, a_1 \dots a_n ...$ est la borne inférieure d'un sous ensemble A de $\mathbb{R}$ équivaut à dire que l'ensemble des minorants de A contient tous les nombres décimaux $x_k = a_0, a_1 \dots a_k$ définis précédemment mais qu'il ne contient ni $a_0 + 1$ ni aucun nombre de la forme $x_k + 10^{-k}$. Cette remarque permet de démontrer (ce n'est pas si facile quand même) que cet ensemble $\mathbb{R}$ construit à partir des développements décimaux a la propriété de la borne inférieure.

• De même l'addition de deux nombres réels positifs se définit avec la P.B.S. : si x et y sont deux nombres réels positifs, on définit $x + y$ comme le sup. de l'ensemble des sommes $x_k + y_k$.

Tous les paragraphes suivants développent plutôt la partie unicité du théorème du 2) : comment on déduit toutes les prop. du $\mathbb{R}$ « concret » des axiomes du 2)

4) La valeur absolue et la propriété d'Archimède

a) Règle du jeu ici

On veut (peut) déduire toutes les prop. connues (et les autres...) de $\mathbb{R}$ des trois propriétés : $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné, $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ a la P.B.S.

Bref, on considère au départ le $\mathbb{R}$ *abstrait et axiomatique du théorème du 2), dont on va dessiner les contours au fur et à mesure qu'on va dérouler les conséquences des axiomes, cela donnera l'idée de l'unicité de* $\mathbb{R}$ *dans le théorème du 2) : on retrouvera notamment le* $\mathbb{R}$ *"concret" des développements décimaux.*

b) Définition et propriétés de la valeur absolue :

(i) **Déf.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme $\mathbb{R}$ est totalement ordonné, on peut considérer le max. de x et de $-x$, on note : $\boxed{|x| = \max(x, -x)}$

(ii) **Prop.** (I.T) $\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|a + b| \leqslant |a| + |b|$. (I.T.2) $\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

(iii) **Rem.** Réciproque du (i) : expression du max avec la valeur absolue.

Une formule utile : $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$

c) La propriété d'Archimède déduite de la P.B.S.

$$\boxed{\textbf{Prop.}\ \ \forall\, (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ na > b.}$$

Dém. non exigible : par l'absurde avec P.B.S.
Remarque : cette propriété paraît évidente... elle l'est effectivement avec la construction par les développements décimaux... il existe pourtant d'autres corps totalement ordonnés contenant $\mathbb{Q}$ qui ne la vérifient pas...

5) Conséquences de la propriété d'Archimède

Dans ce qui suit, on suppose seulement que $(\mathbb{R},+,\times)$ *est un corps totalement ordonnée ayant la prop. de la PBS et donc la prop. d'Archimède : on n'utilise d'ailleurs en fait que la prop. d'Archimède*
Cette prop. va nous dire comment les entiers $\mathbb{N}$*, les décimaux, les rationnels sont "plongés" dans notre* $\mathbb{R}$ *encore axiomatique.*

a) Première conséquence d'Archimède : relation entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$

Prop. 1 :$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $0 < \dfrac{1}{n} < x$.

Prop. 2 : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $n > x$.

N.B. La prop. 1 se reformule comme une propriété de la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ laquelle ?

b) Deuxième conséquence d'Archimède : densité de $\mathbb{Q}$, avec la flaque d'eau :

Déf. un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $]a,b[\cap A \neq \varnothing$.

Prop. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

savoir dém. "flaque d'eau".

c) Troisième conséquence d'Archimède : partie entières, approximation décimale

(i) Prop.déf. de la partie entière $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Existe par Archimède. Retenir :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

(ii) Rappel de Prop. $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x+y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ et $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
Revoir les exercices faits sur la partie entière.

(iii) Ayant défini la partie entière, on définit les *valeurs décimales approchées* d'un nombre réel, à la précision 10^{-n}. Approximation par défaut, par excès.

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\,!\, a_n \in \mathbb{Z},\ \frac{a_n}{10^n} \leq x < \frac{a_n+1}{10^n}.$$

(iv) **Prop.** (*preuve avec le* (iii) :) $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Rem. Pour la preuve, on utilise plutôt la reformulation suivante de la densité :

un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, a \in A \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.

N.B. on retrouve la densité de $\mathbb{Q}$ d'une autre façon, peut-être plus simple (?), mais l'idée de la flaque d'eau est utile dans bien des contextes.
(viii) Rem. L'ensemble $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$ (sera montré au IV 1) c)).

6) La prop. de la borne sup. donne l'existence de réels vérifiant certaines propriétés.
a) Les racines carrées de nombres positifs : on peut démontrer l'existence de racines carrées pour les nombres positifs en considérant directement pour tout $a > 0$, $\alpha = \sup\{x \in \mathbb{R}, x^2 < a\}$ (exo (*)).

(ii) On peut aussi démontrer plus facilement ce résultat via le théorème de la bijection (B1) : celui-ci repose notamment sur le TVI. Or :

(iii) Pour montrer le T.V.I. version 1 : si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$,$f(a) < 0$, $f(b) > 0$, considérer $c = \sup\{x \in [a,b],\ f(x) < 0\}$. *On montrera au F1, que ce c vérifie bien* $f(c) = 0$.

b) La convergence des approximations décimales : La prop. d'Archimède a permis d'encadrer chaque réel x par des décimaux $a_n/10^n$ et $(a_n+1)/10^n$.

Réciproquement, si on se donne un développement décimal « formel » illimité $(\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots)$ avec $\alpha_0 \in \mathbb{N}$ et $\alpha_i \in [\![0,9]\!]$, et qu'on considère la suite des décimaux $x_n = a_n/10^n$ avec $a_n = \alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n$ obtenue en tronquant ce développement à l'ordre n, on va voir au paragraphe sur les suites que la convergence de la suite (x_n) dans $\mathbb{R}$ vient de la prop. de la borne sup.

c) La forme de tous les intervalles : La PBS donne la forme de tous les intervalles de $\mathbb{R}$ si on définit les intervalles (cf. B1) comme les sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$: cf pl.

III Suites réelles et limite de suites

1) Rappels sur les suites

a) **Rappel de déf.** Une suite réelle u est une *application* de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, autrement dit un élément de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, l'image $u(n)$ se note plutôt u_n et s'appelle le *n-ième terme* de la suite.

Se donner l'application u revient à se donner le $\mathbb{N}$-uplet $(u_0, \dots, u_n, \dots)$. C'est pour cela qu'on note aussi $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

La suite u elle-même se note aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) : parenthèse essentielle !

b) **Rappel de structure** $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-e.v. de référence.

Loi $\times$ pour les suites, comme pour les fonctions : si u et v sont deux suites on définit $u.v$ par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(uv)_n = u_n.v_n$.

c) **Notion de suite extraite (ou sous-suite)**

Déf. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Une suite extraite de (u_n) est par déf. une suite (v_n) de la forme $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est *strictement croissante.*

Exemple : On considèrera souvent pour une suite (u_n) les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Par exemple si $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$ alors (u_{2n}) est constante égale à 1 et (u_{2n+1}) constante égale à -1.

Terminologie : On dit aussi *sous-suite* pour *suite-extraite.*

2) Premières propriétés des suites

a) Monotonie :

(i) Une suite (u_n) est *croissante* ssi $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

Une suite (u_n) est *décroissante* ssi $(-u_n)$ est croissante.

(ii) Une suite (u_n) est *monotone* ssi (u_n) est croissante ou (u_n) est décroissante.

> Deux méthodes pour tester la monotonie :
> signe de $u_{n+1} - u_n$ ou bien si suite de réels strict. positives, comparer pour les u u_{n+1}/u_n à 1.

(iii) Une suite (u_n) est *croissante à partir d'un certain rang* ssi $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$,$(u_n)_{\geq n_0}$ est croissante.

b) Suites bornées

(i) Une suite (u_n) est majorée (resp. minorée) ssi l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est majoré (resp. minoré).

Autrement dit (u_n) est majorée ssi $\exists\, M \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.

Attention à l'ordre des quantificateurs !

(ii) Une suite (u_n) est bornée ssi (u_n) est majorée et minorée ssi $(|u_n|)$ est majorée.

Avec des quantificateurs : (u_n) bornée ssi $\exists\, M \in \mathbb{R}^+$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

(iii) **Rem.** Une suite (u_n) qui est *bornée à partir d'un certain rang* est bornée.

c) Négation des propriétés du a) et b) : bien utiliser les quantificateurs.

3) Limite finie

a) Déf. (u_n) *converge* vers $l \in \mathbb{R}$.
Rem. (se ramener à 0) $u_n \to l \Leftrightarrow (u_n - l) \to 0$.
Avantage : $u_n \to 0 \Leftrightarrow |u_n| \to 0$.

b) Prop. (*dém.*) unicité limite.
Prop. (*dém.*) toute suite extraite converge aussi vers l.

c) Exemple $1/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par prop. d'Archimède.

d) Toute suite convergente est bornée (*dém.*).

4) Limite infinie

a) Déf. de $u_n \to +\infty$.
b) Terminologie :
(i) On dit que (u_n) a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ si (u_n) a une limite finie ou infinie (ii) Mais on garde la terminologie « (u_n) converge » seulement pour le cas d'une limite *finie*.
(iii) On dit qu'une suite est *divergente* si elle n'est pas convergente. Donc deux cas : limite infinie (le 4) ou pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.
c) Si u a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute suite extraite a la même limite. (*dém.*).
d) Si $u_n \to +\infty$ alors (u_n) minorée. (*dém.*).

5) Méthodes pour montrer qu'une suite n'a pas de limite

a) Trouver deux suites extraites convergeant vers des limites différentes :
Exples de $((-1)^n)$, $((-1)^n + \frac{1}{n})$.
b) Trouver une relation entre les termes de la suite qui donne une contradiction à la limite :
Exemple de $(\tan(n))$.

IV Applications de la P.B.S. aux propriétés des suites réelles :

1) Théorème de la limite monotone :

Théorème Toute suite croissante majorée converge dans $\mathbb{R}$ et toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$ (*dém.*). Analogue pour décroissante minorée ou non minorée.

"Majorée-par" : préciser TOUJOURS la CONSTANTE qui majore votre suite sinon pas de point !

Dém. à connaître : Un candidat limite naturel ?

2) Théorème sur les suites adjacentes :

a) Définition : (u_n) et (v_n) sont adjacentes ssi (u_n) croît, (v_n) décroit et $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
b) Théorème : si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles convergent, vers la même limite (*dém.*).

3) Exemples de suites adjacentes :

a) Ex. : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$. (i) (u_n) et (v_n) sont adjacentes et donc CV.
(ii) Pour la valeur de la limite : on démontrera que cette limite est e cf. chap. F.
Application à $e \notin \mathbb{Q}$.

b) **La moyenne arithmético-géométrique :**
Ex. : $(u_0, v_0) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ sont *adjacentes.*
Rappel de l'Inégalité Arithmético-Géométrique $0 < a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.

V Applications des suites aux propriétés de $\mathbb{R}$

1) Caractérisation du sup A comme limite d'une suite d'éléments de A

Carac. du sup. (*dém.*) : $M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, a \in A,\ a \leqslant M, \\ \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M \end{cases}$.

Prop. – Si $\sup A$ n'est pas atteint on peut prendre (a_n) strictement croissante.
Remarque – Ceci donne un exemple de *construction par récurrence.*

2) Caractérisation séquentielle de la densité

a) Caract.(*dém.*) A dense dans $\mathbb{R}$ ssi "tout réel est limite d'une suite d'éléments de A".
Exple connu : $A = \mathbb{Q}$.
b) Prop. (*dém.*) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Ce qui suit n'est PAS au programme de cette semaine

3) Théorème des segments emboités.

a) Déf. *segment* : intervalle *fermé, borné* $[a, b]$.
b) Rappel de déf. : $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\, x \in I_n$.

c) Thme : *Si* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suite de segments tels que :* $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} \subset I_n$ *alors :* $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \varnothing$.
Si en outre diam$(I_n) = (b_n - a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *alors* $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{l\}$.

d) Rem. Si on prend des ouverts emboîtés l'intersection peut être vide, exple : $I_n =]0, \frac{1}{n}[$.

4) Propriété de Bolzano-Weierstrass

a) Lemme : Un réel l est limite d'une suite extraite de $u = (u_n)$ ssi pour tout V voisinage de l, $u^{-1}(V) = \{n \in \mathbb{N},\ u_n \in V\}$ est infini. (On dira que V est "atteint une infinité de fois" par la suite).

b) Théorème de Bolzano Weierstrass (*dém.* $(*)$) : toute suite bornée admet une suite extraite convergente.

Appendice culturel totalement hors-programme sur la construction de $\mathbb{R}$ par Dedekind (alternative à la construction avec les développements décimaux) :

Voici L'idée de Dedekind pour "rajouter aux sous-ensembles majorées de $\mathbb{Q}$ les bornes sup. qui leur manquent" .

Dedekind considère ce qu'il appelle toutes les *coupures* de $\mathbb{Q}$: tous les sous-ensembles A de $\mathbb{Q}$ vérifiant les trois prop suivantes : (i) $A \neq \varnothing$ et $A \neq \mathbb{Q}$, (ii) Si $r \in A$ et $s \in \mathbb{Q}$, $s \leqslant r \Rightarrow s \in A$, (iii) A n'a pas de plus grand élément.

La terminologie s'explique parce si A est une telle coupure alors $\mathbb{Q} = A \cup A^c$ découpe $\mathbb{Q}$ en deux ensembles non vides tels que tout élément de A est inférieur à tout élément de A^c, et A n'a pas de plus grand élément.

Dedekind définit l'ensemble des nombres réel comme l'ensemble de ces coupures de $\mathbb{Q}$.

A tout nombre rationnel r, on associe la coupure $\overline{r} = \{s \in \mathbb{Q}, s < r\}$ ce qui permet d'identifier $\mathbb{Q}$ à un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Mais il y a des coupures non rationnelles, comme l'ensemble vu plus haut : $\{s \in \mathbb{Q}, s^2 < 2\}$. Il montre qu'on peut bien mettre une structure de corps sur ces coupures autrement dit en particulier considérer chacune de ces coupures comme des nombres, qu'on appelle *nombre réel*. La coupure précédente est alors le nombre réel $\sqrt{2}$. On montre que ce corps est un corps totalement ordonné avec la P.B.S.