Exercice 1. Soit F l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^4$ tels que $\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Trouver la dimension et une base de F.

Exercice 2. Soit $u = (1,2,3,1)$ et $v = (1,-1,2,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.
a) Déterminer des équations cartésiennes du plan $P = \mathrm{Vect}(u,v)$ dans $\mathbb{R}^4$.
b) Soit $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x + y + t = 0\}$. Déterminer une base de H.
c) Donner une base de $H \cap P$.

Exercice 3. Soient F, G, H trois s.e.v. d'un e.v. E. Comparer, pour l'inclusion :
a) $(F + G) \cap H$ et $(F \cap H) + (G \cap H)$.
b) $(F \cap G) + H$ et $(F + H) \cap (G + H)$.

Exercice 4. Soient F, G, H trois s.e.v. d 'un e.v. E vérifiant $F \subset G$, $F \cap H = G \cap H$ et $F + H = G + H$. Montrer que $F = G$.

Exercice 5. Soit $P = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y + z + t = 2x + y + t = 0\}$. Déterminer un supplémentaire de P dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dim. n et H un s.e.v. de dim. $n - 1$ de E (on dit que H est un *hyperplan* de E). Déterminer *tous* les supplémentaires de H.

Exercice 7 (Vrai ou faux)**.** Soient F_1, F_2, G trois s.e.v. d'un e.v. E. Si $F_1 \oplus G = F_2 \oplus G$ a-t-on $F_1 = F_2$?

Exercice 8. Soient $E = \mathbb{R}^4$, $u = (1,2,3,0)$, $v = (0,-1,2,-2)$, $w = (3,7,7,2)$, et $t = (1,2,3,1)$ dans E. Soient $F = \mathrm{Vect}(u,v,w)$ et $H = \mathbb{R}t$. Soient $G = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, a + b - d = 0\}$ et $K = \{(\alpha, -\alpha + 3\beta, 3\beta, 2\alpha - 2\beta), (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

Justifier si chacune des quatre affirmations suivantes est vrai ou fausse.

a) F et G sont des sous-espaces vectoriels de dim. 3 de E.
b) $G \cup H$ est un s.e.v. de E.
c) H est un supplémentaire de G.
d) K est un sous-espace vectoriel de dimension 2 et $F + K = E$.

Exercice 9. Soient H et K deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de K et $a \in H$. Justifier si chacune des quatre affirmations suivantes est vraie ou fausse.

a) $\dim(\mathrm{Vect}(e_1 + a, e_2 + a, \ldots, e_k + a)) < k$.
b) $\mathrm{Vect}(e_1 + a, \ldots, e_k + a)$ est un supplémentaire de H.
c) $\mathrm{Vect}(e_1 + a, \ldots, e_k + a) = K$.
d) On peut montrer ici que tout sous-espaces vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins deux supplémentaires distincts.

Exercice 10. Soit E un e.v. de dim. finie et F_1, F_2, F_3 trois s.e.v. de E. Montrer que :

$$\dim(F_1+F_2+F_3) \leq \dim(F_1)+\dim(F_2)+\dim(F_3)-\dim(F_1\cap F_2)-\dim(F_1\cap F_3)-\dim(F_2\cap F_3)+\dim(F_1\cap F_2\cap F_3)$$

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dim. n et F_1 et F_2 deux s.e.v de E. Montrer que si F_1 et F_2 sont deux sev de même dimension alors ils admettent un supplémentaire commun, i.e. qu'il existe un sev G de E tel que $E = F_1 \oplus G = F_2 \oplus G$.
Indication : Justifier qu'il suffit en fait de fabriquer un supplémentaire commun à F_1 et F_2 dans $S = F_1 + F_2$.