

### Décompositions dans $\mathbb{R}[x]$

**Exercice 1.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on pose  $P(x) = x^4 + x^2 + 1$  et  $Q(x) = x^8 + x^4 + 1$ .  
Ecrire  $P$  et  $Q$  comme produit de polynômes réels de degré deux.

**Exercice 2.** a) Justifier que pour tout  $(X, Y) \in \mathbb{C}^2$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X^n + Y^n = \prod_{\omega \in R_n(-1)} (X - \omega Y)$   
où  $R_n(-1)$  est l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de  $-1$  dans  $\mathbb{C}$ .

b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f(X) = (X + 2)^n + X^n$ . Donner si  $n$  est pair, la forme explicite de la décomposition comme produit de polynômes de degrés 1 ou 2 de  $f$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

On trouvera une expression de la forme :  $f(X) = 2 \prod_{k=0}^{n/2-1} (X^2 + 2X + b_k)$  avec  $b_k \in \mathbb{R}$ ,  $|b_k| > 1$ .

### Equations d'un type différent

**Exercice 3.** Résoudre pour  $z \in \mathbb{C}$  l'équation :  $z^7 = \bar{z}$

### Equations que l'on résout en reconnaissant une ...

**Exercice 4.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  le système  $\begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = -\frac{1}{2}, \\ x^3y - xy^3 = \frac{\sqrt{3}}{8} \end{cases}$ .

**Exercice 5.** a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} z^k = 0$ .

b) Montrer que les solutions sont alignés dans le plan complexe.

### Lien Fonctions polynomiales trigo/ polynôme complexes vues avec variable dans $\mathbb{U}$

**Exercice 6** (Fonction polynomiale-trigonométrique). Soient  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  et  $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Soit  $f : x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$  (on dit que  $f$  est une fonction polynomiale trigonométrique réelle de degré au plus  $n$ ).

Montrer que si  $f$  s'annule en  $2n+1$  points distincts de l'intervalle  $[0, 2\pi[$  alors  $f$  est la fonction nulle.

### Remplacer $X$ par 1, c'est facile, remplacer 1 par $X$ c'est plus stylé !

**Exercice 7** (Les polynômes fabriquent des formules pour nous). Soit  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ .

a) Donner une expression simple de  $R = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$ .

b) En déduire une expression simple de  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$ .

**Exercice 8** (Bonus, ne sera pas forcément corrigé en classe, le retour de  $\pi^2/6$ ). a) (i) Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Exprimer  $\sin((2m+1)\alpha)$  en fonction de  $\sin(\alpha)$  et de  $\cos(\alpha)$ .

(ii) En déduire que les  $m$  racines  $x_i$  de l'équation :

$$\sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{2m+1}{2p+1} x^{m-p} = 0 \quad (\dagger)$$

peuvent s'écrire sous la forme  $x_k = \cotan^2(\alpha_k)$  et déterminer les nombres  $\alpha_k$ .

(iii) Déterminer la somme des racines de cette équation  $(\dagger)$ .

b) On rappelle que pour  $0 < \alpha < \pi/2$ , on a  $\sin(\alpha) < \alpha < \tan(\alpha)$ .

(i) En appliquant ces inégalités, écrites sous forme convenable, aux nombres  $\alpha_k$  obtenus ci-dessus, déterminer un encadrement de la somme  $s_m = \sum_{p=1}^m \frac{1}{p^2}$ .

(ii) Déterminer la limite de  $s_m$  quand  $m \rightarrow +\infty$ .