

Equations du second degré

Exercice 1. Résoudre $z^2 - (10 + i)z + (26 + 2i) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 2. Soit E_a l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ solution de l'équation : $2(1 + i)z^2 + 2(a + i)z + ia(1 - i) = 0$ où $a \in \mathbb{C}$ est fixé.

a) Expliciter E_a . b) Lorsque a varie dans $\mathbb{R}$, expliciter la forme géométrique de $E := \bigcup_{a \in \mathbb{R}} E_a$.

c) Soit f la similitude directe de centre $\omega = -1/2 - 1/2i$ de rapport $k = \sqrt{2}/2$ et d'angle $\alpha = \pi/4$. Déterminer $f(E_a)$.

Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Exercice 3. Soit $z = \frac{-4}{1 + i\sqrt{3}}$ et $n \in \mathbb{N}^*$; calculer les racines n -ièmes de z .

Exercice 4. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^n = i$ en commençant par poser $X = \frac{1 + iz}{1 - iz}$.
b) Vérifier que toutes les solutions sont réelles. Comment pouvait-on le savoir à l'avance ?

Exercice 5. Résoudre l'équation $z^8 + z^4 + 1 = 0$.

Montrer que l'ensemble des solutions est inclus dans $\mathbb{U}_{12}$ et donner son complémentaire dans $\mathbb{U}_{12}$.

Exercice 6. Pour deux entiers n et m , déterminer explicitement $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m$.

Exercice 7. Soit A, B, C, D, E, F un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Déterminer $AB \times AC \times AD \times AE \times AF$.

Exercice 8. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes suivantes où les ... s'arrêtent quand on dépasse $\binom{n}{n}$.

$$\begin{aligned} a &= 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots & p &= 1 + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots \\ b &= \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots & q &= \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots \\ & & r &= \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots \end{aligned}$$

Surjectivité (ou presque) de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

Exercice 9. Montrer que si $f \in \mathbb{C}[z]$ et f est non constante, alors $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est *surjective*, mais n'est pas injective si $\deg(f) > 1$.

Exercice 10. Montrer que $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective : pour cela pour on notera $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $w = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, et on étudiera l'équation $e^z = w$.

Exercice 11. On définit deux applications $\cos$ et $\sin$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par les formules d'Euler :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

a) Résoudre l'équation $\sin(z) = 2$ pour $z \in \mathbb{C}$.

b) Montrer que la fonction $\sin$ est *surjective* de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Lien coefficients/racines pour le troisième degré

Exercice 12. Soient $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$ tels que $|u| = |v| = |w| = 1$ et $u + v + w = 0$. montrer que $u = jv = j^2w$ ou bien $u = jw = j^2v$.

Exercice 13. Résoudre dans $(\mathbb{C}^*)^3$ le système suivant :
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ 1/a + 1/b + 1/c &= 1, \\ a + b + c &= 0 \end{cases}$$

Exercice 14 (Introduction aux sommes de Newton). Soient $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, $S = x + y + z$, $D = xy + xz + yz$, $P = xyz$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $S_k = x^k + y^k + z^k$, appelée la k -ième somme de Newton de x, y, z .

a) Exprimer S_2 en fonction de S et D .

b) Exprimer S_3 en fonction de S, D, P .

Scholie : Que vous ayez réussi ou non le b), voici une méthode sûrement différente de celle que vous avez tentée pour le b).

On considère le polynôme Q défini par $Q(t) = (t - x)(t - y)(t - z)$, $Q \in \mathbb{C}[t]$. On sait que $Q(t) = t^3 - St^2 + Dt - P$.

Comme x, y, z sont des racines de Q on a :

$$x^3 - Sx^2 + Dx - P = 0,$$

$$y^3 - Sy^2 + Dy - P = 0,$$

$$z^3 - Sz^2 + Dz - P = 0.$$

Par l'addition des trois égalités, on obtient : $S_3 - SS_2 + DS_1 - 3P = 0$ où $S_1 = S$. (**Formule de Newton**)

c) Comment modifier la méthode donnée dans la Scholie pour obtenir une relation donnant S_4 en fonction de S_3, S_2, S_1, S, D, P ?