

**Chap. C3 : nombres complexes.**  
**Propriétés des polynômes à coefficients complexes**

*Si une équation algébrique, de quelque degré qu'elle soit, a des racines imaginaires, chacune sera comprise dans cette formule générale  $a + b\sqrt{-1}$ , les lettres  $a$  et  $b$  marquant des quantités réelles.*

L. Euler, *Recherches sur les racines imaginaires des équations*, 1751.

## I Equations de degré deux

### 1) Racines carrées d'un nombre complexe.

a) **Rappel de terminologie (chap. C1) :**  $\zeta$  est une racine carrée de  $z$  ssi  $\zeta^2 = z$ .

b) **Théorie :** (i) L'essentiel : **Prop.** tout nombre complexe non nul a deux racines carrées, opposées.

(ii) **N.B.** On ne fera pas de choix pour privilégier une de ces deux racines carrées, et donc on n'utilisera **pas** la notation  $\sqrt{z}$  pour un  $z \in \mathbb{C}$ , non réel.

(iii) Preuve du (i) avec l'écriture trigonométrique :

Retenir que pour  $z = re^{i\theta}$  les racines carrées sont  $\sqrt{r}e^{i\theta/2}$  et son opposé.

#### c) Détermination pratique :

(i) Avec la forme trigo. Exple pour  $z = -1 + i\sqrt{3}$

(ii) Avec la forme  $a + ib$ . Exple pour  $z = 3 - 4i$

Pour la méthode «  $a + bi$  » : rajouter au système obtenu à partir de  $\zeta^2 = z$  l'équation (impliquée par la précédente) :  $|\zeta|^2 = |z|$

#### d) Pourquoi il ne faut **vraiment pas** utiliser la notation $\sqrt{z}$ : jouons avec le feu !

(i) On peut faire un choix : par exemple en écrivant  $z = re^{i\theta}$  avec  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ , et en posant  $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ . Autrement dit, on choisit la racine carrée « dans le demi-plan de droite » (attention au bord). Ce choix est fait par exemple en GEOGEBRA.

(ii) La fonction  $z \mapsto \sqrt{z}$  est alors bien définie mais attention, elle fait un *saut* !

(iii) Un autre choix possible : on écrit  $z = re^{i\theta}$  avec  $\theta \in [0, 2\pi[$  et on prend  $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$  avec cette fois  $\theta/2 \in [0, \pi[$ . Ce choix est celui de la fonction `np.sqrt` en PYTHON.

(iv) Plus grave encore : une vilaine tentation de la notation  $\sqrt{z}$  :

On aurait envie d'écrire  $\sqrt{z}\sqrt{z'} \stackrel{?}{=} \sqrt{zz'}$ .

Or (avec la convention du (i) comme celle du (iii))  $\sqrt{-1}\sqrt{-4} \neq \sqrt{4}$

Moralité : nous n'écrirons **pas**  $\sqrt{z}$  pour un  $z \notin \mathbb{R}^+$  !

### 2) Polynômes du second degré à coefficients complexes.

On considère  $z \mapsto P(z) = az^2 + bz + c$  avec  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  et  $a \neq 0$ .

Exple :  $P(z) = z^2 + (2 + i)z + 2i$ .

On cherche les zéros de  $P$  appelés aussi *racines* de  $P$  i.e. les  $z \in \mathbb{C}$  tels que  $P(z) = 0$ .

a) **Ce qui marche dans tous les corps (où  $2.1_K \neq 0_K$ ) :** la forme canonique.

b) **Ensuite on est ramené au problème de trouver les racines carrées de  $\Delta$ .**

Dans  $\mathbb{C}$ , c'est toujours possible par 1) b). Donc en choisissant une racine carrée  $\delta$  de  $\Delta$ , on peut appliquer les mêmes formules :

Les zéros de  $P$  sont  $\frac{-b + \delta}{2a}$  et  $\frac{-b - \delta}{2a}$  où  $\delta^2 = \Delta$ .

c) **Pratique** : la seule différence par rapport au cas réel : un calcul supplémentaire pour trouver une racine  $\delta$  de  $\Delta$  avant de pouvoir trouver les racines du polynôme.

d) **Attention** : les racines ne sont **PAS** en général conjuguées.

## II Racines $n$ -ièmes d'un nombre complexe, de l'unité.

### 1) Recherche des solutions $\zeta$ de l'équation $\zeta^n = z$ : forme trigonométrique.

a) Propriété : tout nombre complexe  $z \neq 0$  a exactement  $n$  racines  $n$ -ièmes distinctes.

b) Preuve : avec l'écriture trigonométrique.

Mieux la preuve donne la :

c) Forme explicite : si  $z = re^{i\theta}$ ,  $\zeta = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}$  pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

### 2) Cas particulier des racines de l'unité i.e. des racines $n$ -ièmes de 1.

a) Notation :  $\mathbb{U}_n = \{\omega \in \mathbb{C}, \omega^n = 1\}$ .

b) Forme explicite de ces racines  $\mathbb{U}_n = \{\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\} = \{\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ .

c) Exemples de  $\mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3, \mathbb{U}_4, \mathbb{U}_6$  avec représentations graphiques.

d) Interprétation géométrique générale : en notant  $M_k$  le point du plan d'affixe  $\omega_k$  :

La relation  $\omega_{k+1} = e^{\frac{2i\pi}{n}} \omega_k$  équivaut à  $M_{k+1} = R_{O, \frac{2\pi}{n}}(M_k)$ .  
Les racines  $n$ -ièmes de l'unité définissent un polygone régulier à  $n$  côtés.

e) Prop.  $(\mathbb{U}_n, \times)$  est un groupe. Mieux, c'est le sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$  engendré par  $\omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ .

### 3) Retour aux racines $n$ -ièmes d'un nombre complexe qcq

a) Réécriture du 1). Les racines  $n$ -ièmes de  $z = re^{i\theta}$  s'écrivent :  $\zeta = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}} \omega_k$  avec  $\omega_k \in \mathbb{U}_n$ .

b) Mnémotechnique :

les racines  $n$ -ièmes de  $z$  s'obtiennent à partir de la racine  $n$ -ième "évidente"  $\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}$  par multiplications successives par toutes les racines  $n$ -ièmes de l'unité.

c) Exemple : racines 4ièmes de  $z = -8 - i8\sqrt{3}$ .

d) Géométriquement : les racines  $n$ -ièmes de  $z$  forment aussi un polygone régulier. (dém.)

### 4) Somme des racines $n$ -ièmes de l'unité :

a) Propriété de la somme :

$$(i) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^k = 0 \text{ où } \omega_1 = e^{2i\pi/n}.$$

(ii) Un ami important :  $j = \exp(2i\pi/3)$  (notation en *maths*! Pas en électricité ou en PYTHON!) Avec ces notations  $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ . Le (i) dit que :  $1 + j + j^2 = 0$ . Interprétation géométrique ?

b) Autre façon d'écrire le résultat du a) :  $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$ .

## III Théorie générale pour les polynômes de degrés supérieurs

### 1) Théorème d'unicité de l'écriture des fonctions polynomiales de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

a) **Notation (provisoire)** : on note  $\mathbb{C}[z]$  (ou  $\mathbb{C}[x]$ ) l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients complexes. La notation  $z$  ou  $x$  pour la variable est bien sûr en vérité *muette*. Mais l'usage est plutôt de noter  $z$  si on considère ces fonctions de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ .

Autrement dit :

**Déf.**  $f \in \mathbb{C}[z]$  ssi il existe un  $n \in \mathbb{N}$  et des coefficients  $(a_n, \dots, a_0) \in \mathbb{C}^{n+1}$  tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0.$$

**N.B. 1** Le  $\mathbb{C}$  dans la notation  $\mathbb{C}[z]$  fait référence à l'anneau (ici au corps) où vivent les *coefficients* de ces fonctions polynomiales. Ainsi on pourrait noter  $\mathbb{R}[z]$  l'ensemble des fonctions polynomiales de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  mais à coefficients réels (mais il faudrait préciser que  $z \in \mathbb{C}$ .)

**N.B. 2** Cette notation est provisoire, car plus tard (chapitre K sur les polynômes sur un corps K quelconque), on désignera plutôt par  $\mathbb{C}[X]$  l'ensemble des *polynômes formels* qui ne sont plus des fonctions, mais simplement codés chacun comme une liste de coefficients  $[a_n, \dots, a_0]$ .

**b) Thème fondamental d'unicité de l'écriture pour une fonction  $f \in \mathbb{C}[z]$  :**

(i) Rappel du chapitre B2 : au B2 § I, on avait démontré l'unicité de l'écriture d'une fonction polynomiale réelle à partir du théorème sur le nombre de zéros réels d'une fonction polynomiale réelle, obtenu lui-même par récurrence à partir des variations.

Ici, on va "inverser le raisonnement" en déduisant le théorème sur les racines du théorème d'unicité. Commençons donc par énoncer le théorème d'unicité :

**Théorème d'unicité de l'écriture :** S'il existe un  $n + 1$ -uplet  $(a_n, \dots, a_0) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$  tel que  $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ , alors aussi bien le nombre  $n$  que les coefficients  $a_n, \dots, a_0$  sont déterminés de façon unique par la fonction  $f$ .  
Autrement dit : si on a  $(b_m, \dots, b_0) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$  avec  $b_m \neq 0$  tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^m b_k z^k = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (\dagger)$$

alors  $m = n$  et  $\forall k \in [0, n], a_k = b_k$ .

(iii) Corollaire : la notion de degré d'un polynôme non nul est bien définie.

On a bien sûr toutes les mêmes prop. du degré : notamment  $\deg(f.g) = \deg(f) + \deg(g)$  pour tout  $(f, g) \in (\mathbb{C}[z] \setminus \{0\})^2$ .

(iv) Remarque : on reviendra sur ce résultat fond. d'unicité, en le généralisant à d'autres corps encore aux chap. D et K.

**2) Division euclidienne des polynômes et lemme de factorisation :**

a) Algo de division euclidienne des polynômes à coeff. complexes : le même qu'au B2.

b) Conséquence :

**Lemme de factorisation :** Soit  $P \in \mathbb{C}[z]$ . Un nombre  $\alpha \in \mathbb{C}$  est un zéro de  $P$  si, et seulement si, il existe  $Q \in \mathbb{C}[z]$  tel que  $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - \alpha)Q(z)$ .

c) Illustration pour les poly. de degré deux : lien entre coefficients et racines

Si  $z \mapsto P(z) = az^2 + bz + c$  avec  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$  et si  $z_1$  et  $z_2$  sont les racines de  $P$  alors  $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$

Savoir dém. avec le lemme de factorisation, même si  $z_1 = z_2$ .

On retient :  $P(z) = a(z^2 - Sz + \Pi)$  où  $S$  est la somme et  $\Pi$  le produit des racines.

**3) Théorèmes sur les zéros des fonctions polynomiales complexes :**

**a) Théorème.** Un polynôme  $P \in \mathbb{C}[z]$  de degré  $n$  a au plus  $n$  racines dans  $\mathbb{C}$ .  
Autrement dit  $\text{Card}(Z(P)) \leq n$ .

(dém. algéb. avec le lemme de factorisation du 2), différente de celle du B2 en réel. On verra plus tard que ce théorème est vrai dans un corps quelconque).

**b) Multiplicité d'une racine (point de vue algébrique)**

Déf.  $\alpha$  est racine de multiplicité au moins  $m$  de  $P$  ssi il existe  $Q \in \mathbb{C}[z]$  tel que pour tout  $z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - \alpha)^m Q(z)$ .  
 $\alpha$  est racine de multiplicité exactement  $m$  si en plus  $Q(\alpha) \neq 0$ .

**Terminologie :** On appelle *racine simple* une racine de multiplicité exactement un.

**c) Polynômes scindés :**

(i) Déf.  $P$  est scindé (ou scindable) dans  $\mathbb{R}[x]$  (resp.  $\mathbb{C}[x]$ ) ssi il peut s'écrire comme produit de facteurs dans  $\mathbb{R}[x]$  (resp.  $\mathbb{C}[x]$ ) qui sont tous de degré 1 (écriture scindée).

(ii) Exemple de polynôme non scindable dans  $\mathbb{R}[x]$ ,  $P : x \mapsto x^2 + 1$ , écriture scindée dans  $\mathbb{C}[x]$ .

(iii) Écriture scindée dans  $\mathbb{C}$  : exemple de  $X^3 - 2$  et  $X^n - 1$ .

*Chercher l'écriture scindée dans  $\mathbb{C}$ , c'est chercher les racines dans  $\mathbb{C}$  puis leurs multiplicités.*

(iv) Application de l'écriture scindée dans  $\mathbb{C}[x]$  à la factorisation dans  $\mathbb{R}[x]$  : sur les exemples du (iii).

**d) Le théorème de d'Alembert-Gauss ou théorème fondamental de l'algèbre :**

(i) Thme : tout  $P \in \mathbb{C}[z]$  non constant admet au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ .

**N.B.** Les démonstrations de ce théorème reposent toujours sur un argument d'analyse, typiquement sur les propriétés de ces polynômes comme fonction de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ .

(ii) Corollaire (dém.) Tout  $P \in \mathbb{C}[z]$  est scindable dans  $\mathbb{C}[z]$ .

(iii) Remarque : Dans  $\mathbb{C}[z]$  tout polynôme de degré  $n$  a toujours  $n$  racines dans  $\mathbb{C}$  à condition de compter chaque racine autant de fois que sa multiplicité.

(iv) Remarque : un polynôme de degré  $n$  a  $n$  racines *distinctes* ssi toutes ses racines sont de multiplicité un.

**4) Point de vue fonctionnel : les polynômes comme applications de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$**

a) Conséquence de d'Alembert-Gauss : *savoir dém.* si  $f$  est une fonction polynomiale non constante, alors  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est surjective.

b) Dérivation d'un polynôme par rapport à la variable  $z$  dans  $\mathbb{C}$ .

(i) Déf. : pour une fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , et  $z_0 \in \mathbb{C}$ , on dit que  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0$  ssi les taux de variations  $z \mapsto \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$  ont une limite quand  $z$  tend vers  $z_0$ .

**N.B. 1** la déf. de la limite se formule comme celle dans  $\mathbb{R}$  avec les valeurs absolues, mais en lisant *module* au lieu de *valeur absolue*.

**N.B. 2** En revanche, si on pense à la forme des voisinages, ce sont maintenant des disques... et cela change pas mal de choses ! Le monde des fonctions dérivables de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  fera l'objet d'un cours de L3 (première année d'école d'ingénieur) et l'étude générale de la dérivation des fonctions de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  est essentiellement hors programme en prépa... *Mais pour les fonctions polynomiales elle ne pose aucun problème !*

(ii) On a les mêmes prop. de dérivée d'une somme, d'un produit, et par récurrence si  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z^n$ , alors  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $f'(z) = nz^{n-1}$ .

(iii) Conséquence : si  $P : z \mapsto \sum_{k=0}^n a_k z^k$  alors  $P' : z \mapsto \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}$ .

(iv)

Au chapitre K sur les polynômes formels (sur un corps  $K$  qcq), on *définira* la dérivée par cette formule.

On peut si on veut, et c'est le point de vue du programme, *définir algébriquement* la dérivée des polynômes de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  par la formule du (iii) en faisant abstraction de la notion du limite vue au (i).

c) Caractérisation de la multiplicité des racines avec la dérivation :

(i) Prop. : soit  $P \in \mathbb{C}[z]$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Alors  $\alpha$  est racine de multiplicité exactement  $m$  de  $P$  si, et seulement si,  $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$  et  $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$ .

(ii) **thème admis !** Preuve du sens  $\Rightarrow$  : en dérivant l'égalité  $P(z) = (z - \alpha)^m Q(z)$  et avec Leibniz pour la dérivée  $m$ -ième.

Le sens  $\Leftarrow$  admise ou en exercice, nous y reviendrons au chap. sur les formules de Taylor F2, et sur les polynômes quelconques.

(iii) Exemple concret : pour  $z \mapsto f(z) = z^n - 1$ , on sait  $f$  admet  $n$  racines distinctes les éléments  $\omega_k$  de  $\mathbb{U}_n$ . Algébriquement, on sait qu'elles sont de multiplicité 1. Ici, on retrouve ce résultat avec le polynôme dérivée  $z \mapsto f'(z) = nz^{n-1}$  qui ne s'annule pas aux  $\omega_k$ .

d) Application fonctionnelle (exercice planche) si  $f$  est un polynôme de degré  $d$ , la plupart des point de  $\mathbb{C}$  (sauf un nombre fini qu'on va préciser), ont exactement  $d$  antécédents par  $f$ . En particulier si  $d > 1$ ,  $f$  n'est pas injectif.

#### IV Etude de familles de polynômes particuliers

##### 1) Etude de polynômes de degré trois :

a) Recherches des racines des polynômes de degré 3 :

(i) Des formules générales pour les racines existent : formules de Cardano (H.P, méthode donnée à titre purement culturel).

(ii) On sait parfois résoudre p.ex. avec une prop. d'une racine :

Exercice : Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 - (7+i)z^2 + (28+i)z - 36 + 2i = 0$  en sachant qu'elle admet une racine réelle.

b) Lien coefficients et racines pour les polynômes de degré 3 :

(i) Très utile :  $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d = a[z^3 - Sz^2 + Dz - P]$ .

Ainsi, même si on ne connaît pas les racines d'un polynôme, on connaît leur somme  $S$ , leur produit  $P$  et la somme des produits deux à deux  $D$  (en répétant les racines multiples !)

(ii) En sens inverse : résolution de systèmes.

Exemple : résoudre dans  $\mathbb{C}$  le système : 
$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1, & (1) \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 1 & (2) \\ z_1 z_2 z_3 = 1 & (3) \end{cases}$$

(iii) Autres type de systèmes : avec les sommes de Newton  $s_k = x^k + y^k + z^k$  cf. pl.

c) Analogie pour les polynômes de degré 4, forme générale du coefficient de  $z^{n-1}$  et du coefficient constant dans un polynôme unitaire de degré  $n$ .

##### 2) Factorisation de polynômes particuliers : polynômes en $x^2$ , en $x^3$ , polynômes aux inverses

a) Exemple : factorisations dans  $\mathbb{C}[x]$  de :  $x^6 - 2\cos(\theta)x^3 + 1 = 0$ .

b) Exercice (polynôme aux inverses) : si  $a_n$  et  $a_0$  sont non nuls dans  $\mathbb{C}$ , comparer les racines de  $P : z \mapsto a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  et  $Q : z \mapsto a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ .

##### 3) Polynômes à coeff. réels :

a) (i) Prop : si  $P \in \mathbb{R}[x]$  et si  $a \in \mathbb{C}$  est racine de  $P$  alors  $\bar{a}$  aussi. (dém.)

(ii) Conséquence : pour toute racine complexe non réelle  $\alpha$  de  $P$ , on connaît une autre racine  $\bar{\alpha}$  et  $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$  donne un facteur réel de degré deux dans  $P$ .

(iii) Application à la factorisation du polynôme  $x^6 - 2\cos(\theta)x^3 + 1 = 0$  dans  $\mathbb{R}[x]$ .

b) Méthode alternative pour la factorisation de polynômes dans  $\mathbb{R}$  :

Sur l'exemple de  $x^4 + 1$  : méthode par  $\mathbb{C}$  et purement réelle par forme "anticanonique".